SS 2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Gegeben sei eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$g\colon\ [a,b]\times[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,t)\longmapsto g(x,t),$$

mit deren Hilfe eine Funktion $G\colon\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ durch

$$G(x)=\int_a^x g(x,t)dt$$

definiert wird. Zeigen Sie, daß G differenzierbar ist, und daß die Gleichung

$$G'(x)=g(x,x)+\int_a^x \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei $f\colon\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Der Differentialoperator Δ, gegeben durch

$$\Delta f:=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

heißt **Laplace-Operator**. Ist nun $\phi\colon\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ein Diffeomorphismus so ist der durch den Koordinatenwechsel ϕ beschriebene Operator $\widetilde{\Delta}$ durch folgende Gleichung gegeben.

$$(\Delta f)\circ\phi=\widetilde{\Delta}(f\circ\phi).$$

Ziel ist es den Laplace-Operator in Polarkoordinaten zu beschreiben. Sei dazu ϕ der Koordinatenwechsel von Polarkoordinaten (r,φ) zu kartesischen Koordinaten (x,y).

(a) Zeigen Sie, daß

$$(f_x\circ\phi,f_y\circ\phi)=((f\circ\phi)_r,(f\circ\phi)_\varphi)\cdot J_\phi^{-1},$$

wobei f_x die partielle Ableitung von f nach x bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned}f_x\circ\phi &= (f\circ\phi)_r\cdot\cos\varphi-(f\circ\phi)_\varphi\cdot\frac{1}{r}\sin\varphi\\ f_y\circ\phi &= (f\circ\phi)_r\cdot\sin\varphi+(f\circ\phi)_\varphi\cdot\frac{1}{r}\cos\varphi.\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, daß der Laplace-Operator in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\widetilde{\Delta}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

b.w.

Aufgabe 3. Sei

$$v\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \ x \longmapsto (v_1(x), \ldots, v_n(x))$$

ein Vektorfeld und $\gamma\colon\ [a,b] \longrightarrow U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in U. Das Integral

$$\int_\gamma v\, ds := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\, dt$$

heißt **Kurvenintegral** von v längs γ.

(a) Besitzt das Vektorfeld v ein Potential h (d.h. es gilt $v = -\operatorname{grad} h$), so gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in U

$$\int_\gamma v\, ds = h(\gamma(a)) - h(\gamma(b)).$$

Insbesondere ist dann also das Kurvenintegral gleich 0, falls die Kurve γ geschlossen ist, d.h. falls gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(b) Sei ein Vektorfeld v auf $U = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ gegeben durch

$$v(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

Zeigen Sie, daß v kein Potential besitzt.
(**Hinweis:** Finden Sie eine geschlossene Kurve γ in U, so daß das Kurvenintegral von v längs dieser Kurve nicht verschwindet.)

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck und v ein darauf definiertes Vektorfeld

$$v\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \ (x,y) \longmapsto (f(x,y), g(x,y)),$$

so daß $f_y = g_x$.

(a) Finden Sie ein Potential von h.
(**Hinweis:** Sei $F\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $F_x = f$. Dann setzen Sie an $h(x,y) = F(x,y) + \varphi(y)$, wobei φ eine Funktion auf U ist, die nur von y abhängt.)

(b) Bestimmen Sie ein Potential von $v(x,y) = (2xy, x^2 + 2y)$.

Bemerkung. Wenn ein Vektorfeld $v = (f,g)$ auf $\mathbb{R}^2$ ein Potential besitzt, so folgt offensichtlich $f_y = g_x$. Das Beispiel in Aufgabe 3(b) zeigt, daß diese Bedingung im allgemeinen nicht hinreichend für die Existenz eines Potentials ist. Aufgabe 4 zeigt, daß auf einer Menge wie $\mathbb{R}^2$ diese Bedingung tatsächlich hinreichend ist.

Abgabe: Freitag 25.04.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).