SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

# Funktionentheorie

Übungsblatt 10

**Aufgabe 1.** Gibt es stetige geschlossene Kurven $\gamma$ in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ z & \longmapsto & n(\gamma, z) \end{array}$$

unendlich viele Werte annimmt?

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in all ihren Singularitäten:

$$(a) \quad \frac{1}{(z^3+1)^2}\,, \qquad (b) \quad \frac{1}{\cos \pi z}\,, \qquad (c) \quad \frac{1}{e^z - 1}\,.$$

**Aufgabe 3.** Die Funktion $f$ habe einen Pol zweiter Ordnung in $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ die Laurent-Reihe von $f$ um $z_0$. Wie berechnet man das Residuum $\mathrm{Res}_{z_0} f^2$ aus den Laurent-Koeffizienten $a_k$ von $f$?

**Aufgabe 4.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $S \subset G$ eine diskrete Teilmenge. Weiter sei $f \in \mathcal{O}(G \setminus S)$. Zeigen Sie daß $f$ genau dann eine Stammfunktion in $G \setminus S$ hat, wenn $\mathrm{Res}_a f = 0$ für alle $a \in S$ gilt.

Abgabe: Donnerstag 24.06.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI