SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Bitte vermerken Sie Ihre Gruppennummer auf Ihren Abgabeblättern!

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Identitäten (wobei Sie die Potenzreihenentwicklungen für e^z, $\sin z$ und $\cos z$, wie auch die Produktregel $e^{z+w} = e^z e^w$ verwenden dürfen):

(a) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$,

(b) $\sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$,

(c) $\cos z = \frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big)$,

(d) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,

(e) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,

(f) $e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i \sin y\big)$,

(g) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$,

(h) $\arg e^z = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

(i) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,

(j) $e^{2\pi i} = 1$.

Aufgabe 2.

(a) Für welche reellen Zahlen a, b, c ist $ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil einer holomorphen Funktion in $z = x + iy$? Bestimme Sie diese holomorphe Funktion. Ist sie eindeutig festgelegt?

(b) Wo ist die Funktion $f(z) = |z|^2 + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ komplex differenzierbar? Ist f irgendwo holomorph?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Folge (f_n) gegeben durch

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + z^n}$$

auf $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen 1 konvergiert und für $r > 1$ auf $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > r\}$ gleichmäßig gegen 0.

b.w.

Aufgabe 4. Auf $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \colon z \neq 0\}$ betrachte die Funktion $f(z) = z^2$. Bestimmen Sie Gleichungen für die Bildkurven der Geraden $x = a$ und $y = b$ für reelle $a, b \neq 0$ und $z = x + iy$. Skizzieren Sie einige dieser Kurven. Zeigen Sie, daß diese Bildkurven jeweils senkrecht aufeinander stehen.

Abgabe: Donnerstag 22.04.10

Bis spätestens 14:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI