SS 2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Bitte beachten Sie die nicht-kanonische Abgabezeit aufgrund des Feiertages!

Das **Doppelverhältnis** $[z, z_1, z_2, z_3]$ von Punkten $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, wobei z_1, z_2, z_3 paarweise verschiedenen sind, ist definiert als

$$[z, z_1, z_2, z_3] := \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \in \hat{\mathbb{C}}\,.$$

Man erweitert die Definition des Doppelverhältnises auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$, indem man Grenzwerte wie folgt betrachtet: Für eine beliebige Folge $(w_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} w_n = \infty$ ist

$$[\infty, z_1, z_2, z_3] := \lim_{n\to\infty} [w_n, z_1, z_2, z_3] = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \in \hat{\mathbb{C}}\,.$$

In gleicher Weise seien die Doppelverhältnise $[z, \infty, z_2, z_3], [z, z_1, \infty, z_3]$ und $[z, z_1, z_2, \infty]$ erklärt.

Aufgabe 1. Schreiben Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ die gebrochen lineare Transformation

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

als Doppelverhältnis in der Form $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$. Zeigen Sie durch Betrachten der Bilder $T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$, daß es zu zwei gegebenen Tripeln (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils verschiedener Punkte von $\hat{\mathbb{C}}$ genau eine gebrochen lineare Transformation T gibt mit $T(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2. (a) Das Doppelverhältnis ist eine Invariante von gebrochen linearen Transformationen, d.h. für $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ gilt

$$[T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)] = [z, z_1, z_2, z_3].$$

Überlegen Sie sich zum Beweis hiervon, daß die Abbildung

$$z \mapsto [T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)]$$

ein Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ ist (vergl. Aufgabe 1).

(b) Zeigen Sie, daß die Gruppe $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ von Translationen $z \mapsto z + b$, Drehstreckungen $z \mapsto az$, $a \neq 0$, und der Inversion $z \mapsto 1/z$ erzeugt wird. Folgern Sie, daß die Automorphismen von $\hat{\mathbb{C}}$ Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ wieder auf Geraden oder Kreise abbilden.

b.w.

Aufgabe 3. Finden Sie alle Automorphismen $T \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, so daß $T(\kappa_1) = \kappa_2$ für zwei gegebene Kreise κ_1, κ_2 in $\mathbb{C}$ und $T(a) = b$ für zwei Punkte in $\mathbb{C}$ mit $a \notin \kappa_1$ und $b \notin \kappa_2$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß eine gebrochen lineare Transformation T genau dann ein Element $T \in \mathrm{Aut}(D_1(0))$ definiert, wenn sie in der Form

$$T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \qquad \text{mit } |a| > |b|$$

geschrieben werden kann.

Bonusaufgabe. (a) Finden Sie einen Automorphismus $T_0 \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, der die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ auf die offene Einheitskreisscheibe $D_1(0)$ abbildet.

(b) Beschreiben Sie die Automorphismengruppe der oberen Halbebene.

Abgabe: Mittwoch 02.06.10

Bis spätestens 17:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI