SS 2011

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Differentialtopologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Die Mannigfaltigkeiten $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind nicht diffeomorph für $n \neq m$.

Aufgabe 2. Die Lorentz-Gruppe $\mathrm{O}(3,1)$, die in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt, ist die Gruppe der reellen (4×4)–Matrizen A, die der Gleichung $A^tDA = D$ genügen, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1,1,1,-1)$ ist. Zeigen Sie, daß $\mathrm{O}(3,1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit des Raumes $\mathcal{M}(4\times 4) \cong \mathbb{R}^{16}$ aller reellen (4×4)–Matrizen ist.

Aufgabe 3. Es Bezeichne $\mathcal{M}(n\times n)$ den Vektorrraum der reellen $(n\times n)$-Matrizen. Für $A \in \mathcal{M}(n\times n)$ definiere

$$\gamma(t) := \exp(tA) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu A^\nu}{\nu!}.$$

(a) Diese Reihe konvergiert für alle $A \in \mathcal{M}(n\times n)$ (oder auch alle komplexen $(n\times n)$–Matrizen).

(b) Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{spur}(A))$.

(c) $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$.

(d) Die Abbildung $t \mapsto \gamma(t)$ ist differenzierbar, und es gilt $\gamma'(0) := T_0\gamma(\partial_t) = A$.

(e) Falls A schiefsymmetrisch ist, so liegt $\gamma(t)$ in $\mathrm{SO}(n)$.

(f) Der Tangentialraum $T_I\mathrm{SO}(n) \subset T_I\mathcal{M}(n\times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der Untermannigfaltigkeit $\mathrm{SO}(n) \subset \mathcal{M}(n\times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet, ist der Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen.

(g) Was ist $T_B\mathrm{SO}(n)$ für ein beliebiges $B \in \mathrm{SO}(n)$?

b.w.

Aufgabe 4. (a) Die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(n)$ der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen ist kompakt.

(b) Die Gruppenoperationen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(n) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

sind differenzierbar.

Eine Gruppe mit Mannigfaltigkeitsstruktur, bezüglich der die Gruppenoperationen differenzierbar sind, heißt **Liesche Gruppe**.

Bonusaufgabe. Die Mannigfaltigkeit $\mathrm{O}(n)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n)$ der $(n \times n)$-Matrizen mit nichtverschwindender Determinante zwei Zusammenhangskomponenten hat, indem Sie Gauß-Elimination in stetige Wege übersetzen. Verwenden Sie dann die Polarzerlegung, d.h. die Darstellbarkeit von $A \in \mathrm{GL}(n)$ als Produkt $A = PR$ mit P positiv definit und symmetrisch, und $R \in \mathrm{O}(n)$.

Abgabe: Dienstag 26.04.11
Bis spätestens 8:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI