SS 2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Das **Kreuzprodukt** oder **Vektorprodukt** von zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ im $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Formal kann man sich dies merken als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ sind.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen, wobei $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $|\,.\,|$ die Standardnorm bezeichnet:

(a) Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist bilinear, und es gilt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

(b) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = 0 = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$, d.h. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist orthogonal zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

(c) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$.

(d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$.

(e) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$, wobei θ den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bezeichnet. Dies bedeutet, daß $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ gleich dem Flächeninhalt des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist. (Dies gilt, wie alle Aussagen über das Kreuzprodukt, nur im $\mathbb{R}^3$.)

(f) Mit $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ gilt

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Folgern Sie hieraus: Falls $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear unabhängig sind, so bilden $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ eine rechthändige Basis des $\mathbb{R}^3$.

b.w.

Aufgabe 2. Sei D eine offene Menge im $\mathbb{R}^3$ und $v = (v_1, v_2, v_3)\colon\ D \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld, d.h. die Komponentenfunktionen $v_1, v_2, v_3\colon\ D \to \mathbb{R}$ seien partiell differenzierbar. Die **Rotation** von v ist das Vektorfeld $\operatorname{rot} v\colon\ D \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$(\operatorname{rot} v)(x) := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x)\right), \quad x \in D$$

(formal $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$). Die **Divergenz** von v ist die Funktion $\operatorname{div} v\colon\ D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(\operatorname{div} v)(x) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x), \quad x \in D.$$

Seien v und $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) - (\triangle v_1, \triangle v_2, \triangle v_3)$, wobei $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der **Laplace-Operator** ist.

Dabei darf verwendet werden, daß bei einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion die partiellen Ableitungen miteinander kommutieren, d.h. ist $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. (Dies wird in der Vorlesung noch gezeigt.)

Aufgabe 3. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f, g\colon\ D \to \mathbb{R}$ Funktionen, deren Richtungsableitungen $D_v f(a)$, $D_v g(a)$ existieren für ein $a \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Verifizieren Sie die Summen-, Produkt- und Quotientenregel für die Richtungsableitung, d.h. die Richtungsableitungen $D_v(f \pm g)(a)$, $D_v(fg)(a)$ und — falls $g \neq 0$ in einer Umgebung von a — $D_v(f/g)(a)$ existieren, und es gilt

$$\begin{aligned} D_v(f \pm g)(a) &= D_v f(a) \pm D_v g(a), \\ D_v(fg)(a) &= D_v f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot D_v g(a), \\ D_v(f/g)(a) &= \frac{D_v f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot D_v g(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

Abgabe: Donnerstag 5.4.12,
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.

Bemerkung: Ab nächster Woche erfolgt die Ausgabe der Übungsblätter dienstags, und die Abgabe ist am darauffolgenden Montag.