SS 2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Für $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ definiere man eine $(n \times n)$-Matrix S_a durch

$$S_a := E - \frac{2}{\langle a, a\rangle}\, aa^t,$$

wobei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix bezeichne. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix S_a ist symmetrisch und orthogonal.

(b) Die Abbildung $S_a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Spiegelung an der Hyperebene H_a orthogonal zu a, d.h. $S_a(x) = x$ für $x \in H_a$, und $S_a(a) = -a$.

Aufgabe 2. Im $\mathbb{R}^3$ sei die rechthändige Drehung um die i-te Koordinatenachse durch einen Winkel α mit $D_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, bezeichnet. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß sich jede Matrix $A \in \mathrm{SO}(3)$ in der Form

$$A = D_1(\alpha)D_2(\beta)D_3(\gamma)$$

für geeignete Winkel α, β, γ schreiben läßt.

(a) Schreiben Sie die Drehungen $D_i(\alpha)$ als (3×3)-Matrizen.

(b) Sei nun $A \in \mathrm{SO}(3)$ gegeben. Zeigen Sie durch Betrachten der Spaltenvektoren von A, daß es einen Winkel α gibt, so daß

$$D_1(-\alpha)A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie durch Betrachten der Zeilen der Matrix $D_1(-\alpha)A$, daß es einen Winkel γ gibt, so daß

$$D_1(-\alpha)AD_3(-\gamma) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

(d) Zeigen Sie, daß sich A in der zu Beginn behaupteten Form schreiben läßt.

(e) Zeigen Sie, daß sich A mit geeigneten Winkeln φ, ψ, θ auch in der Form

$$A = D_3(\varphi)D_1(\psi)D_3(\theta)$$

schreiben läßt.

b.w.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß sich jede Matrix aus der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n)$ als Produkt von höchstens n Spiegelungen (vergl. Aufgabe 1) schreiben läßt. Überlegen Sie sich dazu zunächst, daß zu $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $\|u\| = \|v\|$ stets ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, so daß $S_a(u) = v$ und $S_a(v) = u$.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe bezeichne A stets eine Matrix aus der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(3)$. Zeigen Sie (auch unter Verwendung der Ergebnisse der vorangegangenen Aufgaben):

(a) A läßt sich in der Form $\pm S_a S_b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ schreiben, wobei das $+$ genau für $A \in \mathrm{SO}(3)$ steht.

(b) Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$A(u \times v) = (\det A) \cdot (Au \times Av).$$

Verwenden Sie hierzu die folgende Identität im $\mathbb{R}^3$:

$$\det(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle.$$

(c) A besitzt den Eigenwert $\det A$.

(d) Falls $A \in \mathrm{SO}(3)$, so gibt es eine Spiegelung S und ein eindeutig bestimmtes $\gamma \in [0, 2\pi)$, so daß

$$A = S D_3(\gamma) S.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, daß S so gewählt werden kann, daß Se_3 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist.

(e) Falls $A \in \mathrm{SO}(3)$ und $A \neq E$, so ist A genau dann symmetrisch, wenn $A = -S_a$ für ein $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Aufgabe 5. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, und es bezeichne $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie, daß

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2) + \frac{i}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - iw\|^2).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w \rangle$ und $\|v - iw\|^2 = \langle v - iw, v - iw \rangle$.

Abgabe: Freitag 11.5.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.