SS 2012 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei $M := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x_3 = x_1^2 x_2\}$.

(a) Zeigen Sie, daß M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie eine Karte $\Phi\colon\ \mathbb{R}^2 \to M$ an.

(c) Geben Sie für $p = (0,0,0)$ eine Basis des Tangentialraumes T_pM und des Normalraumes N_pM an.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß weder das Achsenkreuz $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ xy = 0\}$ noch die **Neilsche Parabel** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^3 = y^2\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3. Sei $f\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,u,v) = (z\bar{w} + \bar{z}w, i(\bar{z}w - z\bar{w}), |z|^2 - |w|^2);$$

dabei schreiben wir $z = x + iy$ und $w = u + iv$ als komplexe Variablen. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ist das Urbild $f^{-1}(p)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.

(b) Die Einschränkung $f|_{S^3}$ bildet S^3 surjektiv auf S^2 ab, und für $p \in S^2$ gilt $f^{-1}(p) \subset S^3$.

(c) Die Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(p)$ ist diffeomorph zum Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, d.h. es gibt eine bijektive differenzierbare Abbildung $f^{-1}(p) \to S^1$ mit differenzierbarer Umkehrabbildung.

Diese Abbildung $f|_{S^3}\colon\ S^3 \to S^2$, bei der jedes Urbild $f^{-1}(p)$ (man sagt auch: jede **Faser**) diffeomorph zu S^1 ist, wurde von Heinz Hopf gefunden und heißt heute **Hopf-Faserung**. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Algebraischen Topologie, aber auch z.B. bei der Beschreibung magnetischer Monopole in der Elektrodynamik.

b.w.

Aufgabe 4. Seien reelle Zahlen $0 < a < b < c$ gegeben. Sei ferner für jede reelle Zahl $t \neq a, b, c$ die Funktion $q_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$q_t(x, y, z) = \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch

$$Q(t) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ q_t(x, y, z) = 1\}$$

definierte sogenannte **Quadrik** (d.h. Lösung einer quadratischen Gleichung) ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) Skizzieren Sie diese Untermannigfaltigkeit für die drei Fälle $t < a$, $a < t < b$, $b < t < c$. Die entsprechenden Untermannigfaltigkeiten heißen **Ellipsoid**, **einschaliges Hyperboloid**, bzw. **zweischaliges Hyperboloid**.

(c) Sei $p = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt mit $x_0y_0z_0 \neq 0$. Dann hat die Gleichung $q_t(p) = 1$ genau eine Lösung $t_1 < a$, genau eine Lösung t_2 im Intervall (a, b), und genau eine Lösung t_3 im Intervall (b, c). Mit anderen Worten, durch p geht jeweils genau eine Fläche von einem der drei beschriebenen Typen.

(d) Die Normalenvektoren an $Q(t_1)$, $Q(t_2)$ und $Q(t_3)$ im Punkt p stehen paarweise senkrecht aufeinander.

(e) Die Zuordnung $p \mapsto (t_1, t_2, t_3)$ bildet den ersten Oktanten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ diffeomorph auf $(-\infty, a) \times (a, b) \times (b, c)$ ab.

Aufgabe 5. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v\colon U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (v_1(x), \ldots, v_n(x))$, ein Vektorfeld, und $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow D$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in D, d.h. γ ist stetig, und es gibt eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 \ldots < t_m = b$ des Intervalles $[a, b]$, so daß $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ differenzierbar ist. Das Integral

$$\int_\gamma v\, ds := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\, dt$$

heißt **Kurvenintegral** von v längs γ. Zeigen Sie:

(a) Besitzt das Vektorfeld v ein Potential h (d.h. es gilt $v = -\mathrm{grad}\ h$), so gilt

$$\int_\gamma v\, ds = h(\gamma(a)) - h(\gamma(b)).$$

Insbesondere ist dann also das Kurvenintegral gleich 0, falls die Kurve γ **geschlossen** ist, d.h. falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(b) Sei v das Vektorfeld auf $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ gegeben durch

$$v_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2},\quad v_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, daß v kein Potential besitzt.

Abgabe: Freitag 15.6.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.