SS 2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Die 1-Formen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \neq 0$.

(b) Eine k-Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ heißt **zerlegbar**, falls $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ für geeignete $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$.

  (i) Für $\dim V \leq 3$ ist jede 2-Form zerlegbar.

  (ii) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V^*$ linear unabhängig, so ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$ nicht zerlegbar.

Aufgabe 2. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte man die 2-Form

$$\omega = 2xz\, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\, dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, daß $d\omega = 0$ gilt, und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 3. Es sei $\omega = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy$ eine stetige differenzierbare geschlossene 1-Form auf einem offenen Rechteck $U \subset \mathbb{R}^2$, d.h. es gelte $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Zeigen Sie, daß ω exakt ist, indem Sie nachweisen, daß für jeden beliebigen Punkt $(a,b) \in U$ die Funktion

$$f(x,y) := \int_a^x p(t,b)\, dt + \int_b^y q(x,t)\, dt$$

eine Stammfunktion von ω ist.

Aufgabe 4. In der Vektoranalysis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ hat man folgende Produktregeln für differenzierbare Funktionen f und differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w}$:

(i) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{v} \rangle$

(ii) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{v}$

(iii) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$.

Beweisen Sie diese Formeln, indem Sie die entsprechenden Formeln für Differentialformen herleiten.

b.w.

Aufgabe 5. Die 'nördliche' Hemisphäre der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei mittels der stereographischen Projektion vom 'Südpol' aus parametrisiert, d.h. für $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 < 1$ sei $\Phi(u, v)$ der Schnittpunkt von S^2 mit der Geraden durch die Punkte $(u, v, 0)$ und $(0, 0, -1)$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\{u^2+v^2<1\}} \Phi^*\omega$ für die 2-Form

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy.$$

Abgabe: Freitag 29.6.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.