SS 2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Max Dörner

Mathematik II

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 13

Bei den folgenden Aufgaben handelt es sich um alte Klausuraufgaben. Wir werden diese Aufgaben in der letzten Übungsstunde und im Rahmen der Vorlesung und der Tutorien besprechen.

Aufgabe 1. Für eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, geben Sie präzise Definitionen der Begriffe

(a) Differenzierbarkeit,

(b) partielle Differenzierbarkeit.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x^2+3y^2+z^2+2xy, \end{array}$$

und stellen Sie fest, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß durch die Gleichungen

$$x+y-\sin z=0 \quad \text{und} \quad x+y^3-e^z=-1$$

in einer Umgebung von $x=0$ zwei differenzierbare Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ mit $y(0)=z(0)=0$ definiert werden.

Aufgabe 4. Seien a,b,c gegebene positive reelle Zahlen. Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

im $\mathbb{R}^3$ einbeschrieben ist.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrix:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie den Raum der Lösungen der Differentialgleichung (auf $\mathbb{R}$)

$$\ddot{x}-\dot{x}-6x=0.$$

Aufgabe 7. Bestimmen Sie die Lösung und das maximale Lösungsintervall der Differentialgleichung (auf $\mathbb{R}$)

$$\dot{x}=(1+x^2)t$$

mit Anfangsbedingung $x(0)=0$.

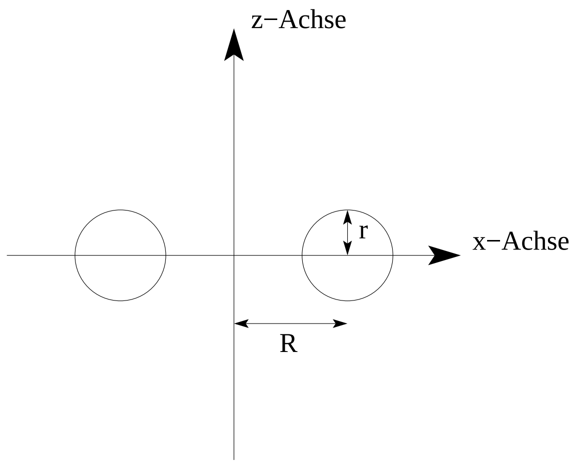
Aufgabe 8. Sei c eine positive reelle Zahl. Die Kurve $\gamma\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \left(e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t\right)$$

heißt logarithmische Spirale.

Bestimmen Sie für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ die Bogenlänge $L_{a,b} := L(\gamma|_{[a,b]})$. Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$?

Aufgabe 9. Betrachten Sie den Torus T, d.h. die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die man erhält, indem man einen Kreis vom Radius r in der xz-Ebene mit Mittelpunkt $(R,0,0)$ um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ rotiert. Hierbei sei $R > r$. Geben Sie eine Karte $\Phi\colon\ \Omega \xrightarrow{\cong} W \subset T$ an, die bis auf ein Paar von Kurven den gesamten Torus beschreibt. (Verifizieren Sie, daß die Bedingungen für eine Karte in der Tat erfüllt sind.)



Aufgabe 10. Sei

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 < 1\}$$

und

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 = z\}.$$

(a) Geben Sie eine geeignete Parametrisierung $\Phi\colon\ \Omega \to Z \cap P$ an, und berechnen Sie das Flächenelement $dS(x)$ für diese Parametrisierung.

(b) Berechnen Sie damit den Flächeninhalt von $Z \cap P$.

Aufgabe 11. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum.

(a) Was versteht man unter dem Dualraum V^*?
(b) Welche Dimension hat V^*?
(c) Wie ist das Dachprodukt $\alpha \wedge \beta$ von $\alpha, \beta \in V^*$ erklärt?
(d) Welche Dimension hat der Raum $\bigwedge^2 V^*$ der 2-Formen?

Aufgabe 12. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte die 2-Form

$$\omega = 3z\,dy \wedge dz + (x^2 + y^2)\,dz \wedge dx + xz\,dx \wedge dy.$$

Weiter sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Teilmenge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z = xy\}.$$

(a) Begründen Sie, warum M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
(b) Geben Sie eine Parameterdarstellung $\Phi\colon\ \Omega \to M$ von M als Graph.
(c) Berechnen Sie $\Phi^*\omega$.