SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Das Möbiusband hat, aufgefaßt als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, eine Randkurve, die sich ohne Selbstdurchdringungen in einen Standardkreis deformieren läßt. Finden Sie eine Einbettung des Möbiusbandes in den $\mathbb{R}^3$, so daß der Rand ein Standardkreis ist. Stellen Sie ein Papiermodell her.

Zur Erinnerung: Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, genannt **offene Mengen**, mit den Eigenschaften:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

(ii) der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen,

(iii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$.

Aufgabe 2. (a) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heiße offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß die ϵ-Umgebung von x,

$$U_\epsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\},$$

noch ganz in U liegt.

Zeigen Sie, daß dies eine Topologie auf M definiert (die **metrische Topologie**).

(b) Eine Abbildung $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt **stetig**, falls zu jedem $x_0 \in M$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt:

$$d_M(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Zeigen Sie, daß eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann in diesem metrischen Sinne stetig ist, wenn sie stetig bezüglich der metrischen Topologie ist.

Aufgabe 3. (a) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ von offenen Mengen heißt **Basis der Topologie**, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. (Insbesondere ist also $\mathcal{O}$ selbst eine Basis der Topologie.)

Zeigen Sie: $\mathbb{R}^n$ mit der metrischen Topologie (bzgl. der euklidischen Metrik) hat eine abzählbare Basis der Topologie.

(b) Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement von A offen ist, d.h. $X \setminus A \in \mathcal{O}$.

Zeigen Sie:

(i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen,

(ii) die Vereinigung je zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen,

(iii) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

b.w.

Aufgabe 4. Für $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, definieren wir die Teilmenge

$$\mathbb{N}_{a,b} := \{a + nb \colon n \in \mathbb{Z}\}$$

von $\mathbb{Z}$. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{Z}$ soll offen heißen, wenn zu jedem $a \in U$ ein $b > 0$ existiert mit $\mathbb{N}_{a,b} \subset U$.

Zeigen Sie:

(a) Diese Definition offener Mengen liefert eine Topologie auf $\mathbb{Z}$, und jede Teilmenge $\mathbb{N}_{a,b} \subset \mathbb{Z}$ ist offen.

(b) Jede nichtleere offene Teilmenge von $\mathbb{Z}$ in dieser Topologie besitzt unendlich viele Elemente.

(c) Jede Teilmenge $\mathbb{N}_{a,b} \subset \mathbb{Z}$ ist auch abgeschlossen. Schreiben Sie dazu $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_{a,b}$ als Vereinigung von Mengen der Form $\mathbb{N}_{a',b'}$.

Mittels der Topologie aus Aufgabe 4 kann man zeigen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Jede Zahl $n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1$ hat einen Primteiler p und ist daher Element von $\mathbb{N}_{0,p}$. Es folgt

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{N}_{0,p},$$

wobei $\mathbb{P}$ für die Menge der Primzahlen steht. Wäre $\mathbb{P}$ endlich, so wäre $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ nach (c) eine Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen, und daher abgeschlossen. Dann wäre $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ eine offene Teilmenge, im Widerspruch zu (b).

Abgabe: Montag 15.04.2013 bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik

(Das Papiermodell zu Aufgabe 1 bitte nicht mit einwerfen, sondern zur Übung mitbringen.)