SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Es seien $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball im $\mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $D^n \setminus S^{n-1}$.

(b) Die Gerade durch den 'Nordpol' $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und einen weiteren Punkt $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ schneidet die Äquatorebene $\{x_{n+1} = 0\}$ in genau einem Punkt. Dies definiert eine Abbildung $S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, die sogenannte **stereographische Projektion**. Geben Sie eine explizite Formel für diese Abbildung an und zeigen Sie damit, daß $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu $S^n \setminus \{p\}$ ist für jeden beliebigen Punkt p von S^n.

(c) Der Quotientenraum D^n/S^{n-1} ist homöomorph zu S^n. (Mit X/A ist der Quotientenraum unter der Äquivalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow \big(x = y \text{ oder } x, y \in A\big)$ gemeint.)

Der **projektive Raum** $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist der Raum aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$. Formal kann man $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ definieren als Quotientenraum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon\ y = \lambda x.$$

Alternativ kann man $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ schreiben als $S^n/x \sim -x$. Die Äquivalenzklasse eines Punktes

$$(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

schreibt man dann in **homogenen Koordinaten** als $[x_0 : \ldots : x_n]$, d.h. es gilt

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n] \ \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $x_n \neq 0$ gilt also

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [\frac{x_0}{x_n} : \ldots : \frac{x_{n-1}}{x_n} : 1].$$

Der Punkt $(x_0/x_n, \dots, x_{n-1}/x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist dabei der Schnittpunkt der durch $[x_0 : \ldots : x_n]$ bestimmten Ursprungsgeraden mit der Hyperebene $\{x_n = 1\}$. Die Punkte des $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ dieser Form kann man also mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Die Punkte der Form $[x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0]$ entsprechen den Ursprungsgeraden parallel zu $\{x_n = 1\}$; diese bilden einen $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Als Punktmenge können wir daher schreiben $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. Man spricht vom $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ 'im Unendlichen'.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß der Raum, der aus D^2 durch Identifikation von x mit $-x$ für alle Randpunkte $x \in S^1 = \partial D^2$ entsteht, homöomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß man die Kleinsche Flasche als Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ auffassen kann, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist durch

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \ \text{ und } \ (x, y) \sim (-x + 1, y + 1).$$

(c) Wir fassen S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon \; |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ & (z,w) & \longmapsto & (\overline{z}, -w) \end{array}$$

ein Homöomorphismus des 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ ist, der eine Operation der zyklischen Gruppe $C_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Ordnung 2 auf dem Torus erzeugt. Zeigen Sie weiter, daß der Orbitraum T^2/C_2 homöomorph zur Kleinschen Flasche ist.

Aufgabe 3. (a) Sei $X \subset \mathbb{C}^3$ der Raum der von Null verschiedenen komplexen Polynome $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ mit reellen Nullstellen. Zwei Polynome $p, q \in X$ sollen äquivalent heißen, falls sie dieselbe Nullstellenmenge haben. Dabei werden die Nullstellen mit Vielfachheit gezählt, z.B. gelten die Polynome $z+a$ und $(z+a)^2$ *nicht* als äquivalent. Zeigen Sie, daß der Quotientenraum $X/\sim$ unter dieser Äquivalenzrelation homöomorph zum Möbiusband ist.

(b) Zeigen Sie, daß der Raum der Konjugationsklassen unitärer (2×2)-Matrizen, d.h. der Quotientenraum $\mathrm{U}(2)/\sim$, wobei für $A, B \in \mathrm{U}(2)$ gelten soll

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \exists C \in \mathrm{U}(2) \colon \; B = CAC^{-1},$$

homöomorph zum Möbiusband ist.

Aufgabe 4. Ist $f\colon \; X \to Y$ eine injektive Abbildung und $f\colon \; X \to f(X)$ ein Homöomorphismus, wenn man $f(X)$ die durch Y induzierte Topologie gibt, so heißt f eine **Einbettung**. Zeigen Sie:

(a) Jede stetige und injektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist eine Einbettung.

(b) Die Abbildung $f\colon \; S^2 \to \mathbb{R}^4$ gemäß

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz),$$

wobei S^2 die Einheitssphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, induziert eine Einbettung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = S^2/(x,y,z) \sim -(x,y,z)$ in den $\mathbb{R}^4$.

Abgabe: Montag 22.04.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik