SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

# Flächen

Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Sei $X$ die topologische Summe von zwei Kopien von $\mathbb{R}^2$. Wir können $X$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ realisieren, z.B.

$$X := \mathbb{R}^2 \times \{-1\} \cup \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Auf $X$ sei eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$(\mathbf{x}, s) \sim (\mathbf{y}, t) :\Longleftrightarrow (\mathbf{x}, s) = (\mathbf{y}, t) \text{ oder } \mathbf{x} = \mathbf{y} \neq \mathbf{0} := (0,0) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, daß der Quotientenraum $X/\!\sim$ lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht Hausdorffsch. Beschreiben Sie dazu die offenen Umgebungen von $[(\mathbf{0}, -1)]$ und $[(\mathbf{0}, 1)]$ in $X/\sim$. Anschaulich gesprochen ist $X/\!\sim$ eine Kopie von $\mathbb{R}^2$ mit einem verdoppelten Ursprung.

**Aufgabe 2.** Seien $X$ und $Y$ Kopien des offenen Intervalles $(-1,1) \subset \mathbb{R}$. In $X$ betrachten wir die Teilmengen $A_1 := (-1, 0)$ und $A_2 := (-1, 0]$. Weiter seien Einbettungen $\varphi_i\colon A_i \to Y$ gegeben durch $\varphi_i(t) := t$, wobei $t$ auf der linken Seite als Element von $A_i \subset X$ interpretiert wird, und rechts als Element von $Y$. Zeigen Sie:

(a) $Y \cup_{\varphi_1} X$ ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$, aber nicht Hausdorffsch.

(b) $Y \cup_{\varphi_2} X$ ist Hausdorffsch, aber nicht lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Dieses Beispiel illustriert, daß man beim Verkleben von Mannigfaltigkeiten eine gewisse Sorgfalt walten lassen muß. Vergleiche dazu die Bonusaufgabe unten.

Beim Ankleben eines 1-Henkels an einen 1-Henkelkörper $X$ (bestehend aus einem 0-Henkel und diversen 1-Henkeln) wurde in der Vorlesung argumentiert, daß man die Anklebeabbildung derart stetig deformieren kann, daß der neue 1-Henkel an den Rand des 0-Henkels angeklebt wird, ohne daß dabei der Homöomorphietyp des neuen Henkelkörpers verändert wird. Außerdem wurde implizit unterstellt, daß es nur auf die Orientierung der beiden Komponenten in der Anklebeabbildung

$$\varphi\colon\ \partial D^1 \times D^1 = \{\pm 1\} \times D^1 \longrightarrow \partial X$$

ankommt und auf die jeweiligen Randkomponenten von $\partial X$, in die $\{\pm 1\} \times D^1$ abgebildet werden, aber nicht auf die spezifische Wahl der Einbettung $\varphi$.

Die beiden folgenden Aufgaben sollen dazu dienen, einen Eindruck davon zu geben, wie man diese Argumente präzise ausformulieren kann. Aufgabe 3 ist dabei von ganz allgemeiner Bedeutung für das Verkleben von topologischen Räumen.

**Aufgabe 3.** Wir betrachten die Situation wie in Abschnitt 3.6 der Vorlesung. Seien also $X$ und $Y$ topologische Räume, $A \subset X$ ein Teilraum, und $\varphi_1, \varphi_2\colon A \to Y$ stetige Abbildungen. Wir können dann $X$ mittels $\varphi_i$ an $Y$ anheften und erhalten die beiden Räume $Y \cup_{\varphi_i} X$, $i = 1, 2$.

Es sei nun angenommen, daß es einen Homöomorphismus $h\colon Y \to Y$ gibt, für den $h \circ \varphi_1 = \varphi_2$ gilt. Beschreiben Sie einen Homöomorphismus $X + Y \to X + Y$, der einen Homöomorphismus $Y \cup_{\varphi_1} X \to Y \cup_{\varphi_2} X$ induziert.

**Aufgabe 4.** (a) Sei $\varphi\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine orientierungstreue Einbettung. Überlegen Sie sich, daß 'Einbettung' hier nichts anderes bedeutet als eine stetige, streng monotone Funktion; mit 'orientierungstreu' soll gemeint sein, daß diese Funktion streng monoton wachsend ist. Zeigen Sie, daß es einen Homöomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\Phi|_{[-1,1]} = \varphi$ und $\Phi = \mathrm{id}$ außerhalb einer kompakten Menge.

(b) Sei $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus. Zeigen Sie, daß die Vorschrift

$$H\colon (x, t) \longmapsto (1 - t)x + t\Phi(x)$$

eine stetige Abbildung $H\colon \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert mit folgenden Eigenschaften:

(i) $H(\,.\,, 0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die identische Abbildung,

(ii) $H(\,.\,, 1) = \Phi$,

(iii) $H(\,.\,, t)$ ist ein Homöomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jedes $t \in [0, 1]$.

Eine solche Homotopie via Homöomorphismen nennt man auch eine **reguläre Homotopie** zwischen zwei Homöomorphismen.

(c) Seien nun zwei Einbettungen $\varphi_0, \varphi_1$ wie in (a) gegeben, und $\Phi_0, \Phi_1$ deren Erweiterungen. Sei $H$ die Abbildung aus (b) für den Homöomorphismus $\Phi := \Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}$. Wir wollen die $\varphi_i$ interpretieren als Anheftungsabbildungen einer Randkomponente eines 1-Henkels an den Rand $\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}^2_- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \le 0\}$. Definiere die Abbildung $\widetilde{H}\colon \mathbb{R}^2_- \to \mathbb{R}^2_-$ durch

$$\widetilde{H}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{für } y \le -1, \\ \big(H(x, 1 + y), y\big) & \text{für } -1 \le y \le 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $\widetilde{H}$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^2_-$ ist mit $\widetilde{H} \circ \varphi_0 = \varphi_1$ und $\widetilde{H} = \mathrm{id}$ außerhalb eines Kompaktums. Veranschaulichen Sie die Abbildung $\widetilde{H}$, indem Sie die Bilder der vertikalen Halbgeraden $\{x = x_0, y \le 0\} \subset \mathbb{R}^2_-$ unter $\widetilde{H}$ schematisch darstellen.

**Bonusaufgabe.** Zeigen Sie, daß die verbundene Summe zweier Flächen wieder eine Fläche ist, d.h. überprüfen Sie die Eigenschaften 'lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^2$' und 'Hausdorffsch'.

| Abgabe: Montag 06.05.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik |
|---|