

# Flächen

## Übungsblatt 8

**Aufgabe 1.** Ein Polyeder heißt **simplizial**, falls jede Seitenfläche ein Dreieck ist. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes konvexe simpliziale Polyeder gilt

$$k = 3e - 6, \quad f = 2e - 4.$$

- (b) Die Tripel  $(e, k, f)$ , die durch konvexe simpliziale Polyeder realisiert werden können, sind genau die Tripel der Form

$$(e, 3e - 6, 2e - 4), \quad e \geq 4.$$

Überlegen Sie sich dazu, daß man ausgehend von einem konvexen regulären Polyeder mit  $e$  Ecken eines mit  $e + 1$  Ecken konstruieren kann, indem man auf eine Seitenfläche ein flaches Tetraeder aufsetzt.

**Aufgabe 2.** In dieser Aufgabe sollen die möglichen Tripel  $(e, k, f)$  für beliebige konvexe Polyeder bestimmt werden.

- (a) Überlegen Sie sich, daß man aus einem gegebenen konvexen Polyeder ein simpliziales konvexes Polyeder erhalten kann, indem man die Polygonflächen in Dreiecke unterteilt. Folgern Sie mit Aufgabe 1, daß für jedes konvexe Polyeder

$$k \leq 3e - 6, \quad f \leq 2e - 4$$

gilt. Rechnen Sie nach, daß jede dieser beiden Ungleichungen in Verbindung mit der Eulerschen Polyederformel jeweils aus der anderen Ungleichung folgt.

- (b) Argumentieren Sie mittels des dualen Polyeders, daß auch die Ungleichungen

$$k \leq 3f - 6, \quad e \leq 2f - 4$$

gelten müssen.

- (c) Zeigen Sie, daß die möglichen Tripel  $(e, k, f)$  gegeben sind durch

$$\{(e, e + f - 2, f) : 4 \leq e \leq 2f - 4, 4 \leq f \leq 2e - 4\}.$$

Aufgrund von (a) und (b) ist dazu nur zu zeigen, daß diese Tripel tatsächlich realisiert werden können. Beginnen Sie dazu mit einer Pyramide über einem  $n$ -Eck. Welche Werte von  $(e, k, f)$  werden dadurch realisiert? Welche Werte erhält man, wenn man auf die Dreiecksseiten dieser Pyramide (oder die neu entstehenden Dreiecksseiten) sukzessive Tetraeder aufsetzt? Was erhält man durch Dualisieren dieser Polyeder?

**Aufgabe 3.** Eine differenzierbare Fläche (evtl. mit Rand) heißt **orientierbar**, wenn es einen (differenzierbaren) Atlas gibt, bei dem alle Kartenwechsel in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches eine Jacobische Matrix mit positiver Determinante haben.

(a) Geben sie einen Atlas für  $S^2$  an, der diese Eigenschaft hat.

Hinweis: Wenn Sie mit den stereographischen Projektionen von den Polen arbeiten, genügen zwei Karten. (Wie muß man eine der beiden Projektionen modifizieren, um die Orientierungsbedingung zu erfüllen?) Alternativ kann man z.B. die Orthogonalprojektionen von Hemisphären auf die entsprechende Koordinatenebene verwenden.

(b) Zeigen Sie, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

**Aufgabe 4.** Eine Fläche heißt **geschlossen**, wenn sie kompakt und ohne Rand ist. Nach dem Klassifikationssatz aus der Vorlesung sind dies genau die Flächen  $\#_g T^2$ ,  $g \geq 0$ , und  $\#_h \mathbb{R}P^2$ ,  $h \geq 1$ . Ganz ähnlich wie in Aufgabe 3 kann man zeigen, daß darunter genau die  $\#_g T^2$ ,  $g \geq 0$ , orientierbar sind. Zeigen Sie, daß man aus einer geschlossenen, nicht-orientierbaren Fläche durch Aufschneiden entlang einer einzigen einfach geschlossenen Kurve (d.h. einer geschlossenen Kurve ohne Doppelpunkte) eine orientierbare Fläche mit Rand erhalten kann.