SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Triangulierung von S^2, die durch das Tetraeder bzw. Oktaeder gegeben ist. Wie in der Vorlesung gezeigt, definiert jede solche Triangulierung eine verzweigte Überlagerung $S^2 \to S^2$. Bestimmen Sie die Verzweigungspunkte und deren Verzweigungsindizes für diese beiden verzweigten Überlagerungen.

Aufgabe 2. (a) Verifizieren Sie die Riemann-Hurwitz-Formel für die beiden verzweigten Überlagerungen aus Aufgabe 1.

(b) Verifizieren Sie die Riemann-Hurwitz-Formel für die verzweigten Überlagerungen

$$\Sigma_g := \#_g T^2 \to S^2, \quad g \geq 0,$$

der geschlossenen, orientierbaren Fläche Σ_g vom Geschlecht g über S^2 mit drei Verzweigungspunkten unten in S^2, die in der Vorlesung beschrieben wurden.

Aufgabe 3. Auf Σ_g (vergl. Aufgabe 2) wirke die zyklische Gruppe C_2 der Ordnung 2 derart, daß es genau k Fixpunkte gibt. Außerdem erhalte die Gruppenwirkung die Orientierung von Σ_g. Dann ist $\Sigma_g \to \Sigma_g/C_2$ eine verzweigte Überlagerung mit k Verzweigungspunkten der Ordnung 2 in Σ_g, und Σ_g/C_2 ist eine orientierbare geschlossene Fläche, also homöomorph zu Σ_h für ein $h \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, daß dann $k \leq 2g+2$ und $k \equiv 2g+2 \mod 4$ gelten muß, und bestimmen Sie das entsprechende Geschlecht h der Quotientenfläche.

(b) Zeigen Sie durch ein anschauliches Beispiel, daß unter den Einschränkungen an k aus (a) tatsächlich eine Gruppenwirkung mit den beschriebenen Eigenschaften existiert.

Aufgabe 4. Die Teilmenge $X \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sei definiert durch

$$X = \{[x:y:z] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \colon\ yz - x^2 + z^2 = 0\}.$$

Zeigen Sie durch Betrachten der Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^1, \quad [x:y:z] \longmapsto [y:z],$$

in Verbindung mit der Riemann-Hurwitz-Formel, daß X homöomorph zu S^2 ist.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß es für $g \geq 1$ keine verzweigte Überlagerung $\Sigma_g \to S^2$ mit weniger als drei Verzweigungspunkten gibt.

Abgabe: Montag 17.06.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik