SS 2013

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Flächen

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Wir betrachten die 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Riemannschen Metrik, d.h. $g_p := \langle .,. \rangle|_{T_pS^2}$. Mit anderen Worten, wir messen Längen von Tangentialvektoren an die 2-Sphäre einfach als Längen dieser Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Gegeben seien zwei Punkte $p, q \in S^2$. Wir interpretieren p als Pol und nennen die Großkreise durch p 'Längenkreise'; die Kreise in S^2 orthogonal zu diesen Längenkreisen nennen wir 'Breitenkreise'.

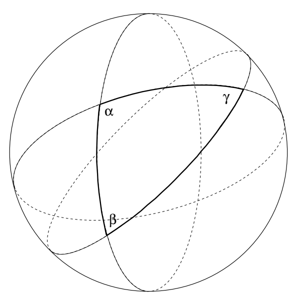
Falls p und q keine Antipodenpunkte sind, so sei C der halbe Längenkreis, der q enthält. Andernfalls sei C irgendein halber Längenkreis, der die Pole p und q verbindet.

Sei $\Phi\colon\ S^2 \to C$ die Projektion längs der Breitenkreise. Zeigen Sie:

(a) $\|T_x\Phi(v)\| \leq \|v\|$ für $v \in T_xS^2$. (Was gilt für v tangential an einen Längenkreis bzw. Breitenkreis? Unter welchem Winkel schneiden sich Längen- und Breitenkreise?)

(b) Die Geodätischen auf S^2 sind genau die Großkreisbögen.

Aufgabe 2. Sei Δ ein von drei Punkten in S^2 und Großkreisbögen zwischen diesen Punkten bestimmtes *sphärisches Dreieck* mit Innenwinkeln α, β, γ. Zeigen Sie vermöge eines elementargeometrischen Argumentes, daß für den Flächeninhalt A von Δ gilt: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$.



Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß der hyperbolische Abstand zwischen $a\mathrm{i}$ und $b\mathrm{i}$ in $H \subset \mathbb{C}$ (wobei $a, b \in \mathbb{R}^+$) gegeben ist durch $|\log(a/b)|$.

(b) Gegeben seien die beiden Punkte $z = 2 + \mathrm{i}$ und $w = -3 + \mathrm{i}$ in H. Zeigen Sie, daß die hyperbolische Gerade ℓ durch z und w gegeben ist durch $C \cap H$, wobei C der euklidische Kreis mit Mittelpunkt $-1/2$ und Radius $\sqrt{29}/2$ ist.

b.w.

(c) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ die Schnittpunkte von C mit der reellen Geraden in $\mathbb{C}$. Setze

$$\Phi(z) = \frac{z-p}{z-q}.$$

Zeigen Sie, daß $\Phi(\ell) = \mathrm{i}\mathbb{R}^+$.

(d) Bestimmen Sie die Bildpunkte $\Phi(z)$ und $\Phi(w)$ und berechnen Sie damit den hyperbolischen Abstand zwischen z und w.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß jede orientierungstreue Isometrie von $(B, \langle ., . \rangle_{h'})$ von der Form

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

ist für ein $\theta \in [0, 2\pi)$ und ein $z_0 \in B \subset \mathbb{C}$.

Bonusaufgabe. Gegeben seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Zeigen Sie, daß es ein hyperbolisches Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ gibt.

Abgabe: Montag 8.07.2013 bis 15:30 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik