SS 2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Es seien $f_0, f_1\colon\ M \to N$ und $g_0, g_1\colon\ N \to W$ jeweils isotope Einbettungen. Dann sind auch $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ isotope Einbettungen.

Aufgabe 2. In einem differenzierbaren Vektorbündel ist jeder differenzierbare Schnitt eine zum Nullschnitt isotope Einbettung.

Aufgabe 3. Für $n > m$ sind je zwei Einbettungen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ isotop zueinander.

Aufgabe 4. (a) Sei M eine geschlossene n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f\colon\ M \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Einbettung. Falls $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ negative Determinante hat, so ist f nicht isotop zu $A \circ f$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß eine geschlossene n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ notwendigerweise orientierbar ist. Einen einfachen Beweis dieser Tatsache werden wir noch kennenlernen. Man kann dann z.B. den Grad der Gauß-Abbildung $\nu\colon\ M \to S^n$ betrachten, die jedem $x \in M$ die äußere Einheitsnormale im Punkt $f(x)$ zuordnet. Dies funktioniert allerdings nur, falls der Grad der Gauß-Abbildung verschieden von Null ist. (Können Sie ein Beispiel einer Fläche $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ angeben, wo dieser Grad Null ist?) Allgemein können Sie so argumentieren, daß Sie die Existenz einer Diffeotopie H_t des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $H_0 = \mathrm{id}$ und $H_1 \circ f = A \circ f$ zu einem Widerspruch führen, indem Sie die Abbildung $A^{-1} \circ H_1$ betrachten. (Hierbei verwenden wir implizit den Isotopieerweiterungssatz, der im Laufe des Semesters bewiesen wird: Eine angenommene Isotopie von M erweitert zu einer Diffeotopie des $\mathbb{R}^{n+1}$.)

(b) Die Inklusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist isotop zur antipodalen Einbettung $S^n \ni x \mapsto -x \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn n ungerade ist.

Bemerkung. Die Inklusion $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist homotop via Immersionen zur antipodalen Einbettung, d.h. man kann die 2-Sphäre "umstülpen", ohne dabei Singularitäten zu erzeugen. Dies ist das sogenannte **Smale-Paradox**, vergleiche

H. Geiges, h-Principles and Flexibility in Geometry, *Memoirs of the American Mathematical Society* ***164*** *(2003).*

Abgabe: Mittwoch 16.04.14 in der Vorlesung.