SS 2014 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

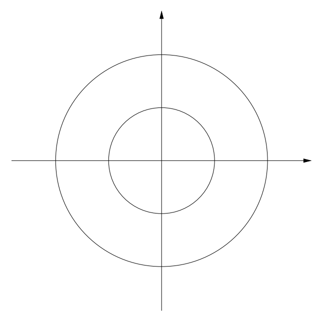
Differentialtopologie II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Es bezeichne $S^1 + S^1$ die differenzierbare Summe zweier Kopien von S^1, d.h. die disjunkte Vereinigung mit der offensichtlichen Mannigfaltigkeitsstruktur. Betrachten Sie die Einbettung

$$S^1 + S^1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

die auf dem ersten Summanden durch die übliche Inklusion $S^1 \subset \mathbb{C}$, auf dem zweiten durch $z \mapsto 2z$ gegeben ist.



Durch

$$\begin{array}{ccccccc} F_t\colon & S^1 & + & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & e^{2\pi i\varphi} & & & \longmapsto & e^{2\pi i(\varphi+t)} \\ & & & e^{2\pi i\theta} & \longmapsto & 2e^{2\pi i(\theta-t)} \end{array}$$

mit $t \in [0,1]$ ist eine Isotopie dieser Einbettung definiert. Erweitern Sie F_t explizit zu einer ambienten Isotopie.

Aufgabe 2. Sei $F\colon\ M\times I \to N$ eine glatte Homotopie zwischen zwei Einbettungen $f,g\colon\ M \to N$, wobei M kompakt ist und $\dim N \geq 2\dim M+2$. Die Dimensionsannahme erlaubt es, die Abbildung $M \times I \to N \times I$, $(x,t) \mapsto (F(x,t),t)$ durch eine Einbettung C^∞-nahe zu approximieren. Schreibe diese Einbettung in der Form $(x,t) \mapsto (G(x,t), H(x,t))$, und setze $H_x(t) := H(x,t)$. Dabei dürfen wir annehmen, daß F eine technische Homotopie ist, und daß $(G(x,t),H(x,t)) = (F(x,t),t)$ für t nahe 0 oder 1.

(a) Zeigen Sie, daß $H_x\colon\ I \to I$ für jedes $x \in M$ invertierbar ist.

(b) Beweisen Sie, daß die Abbildung

$$M \times I \longrightarrow N, \quad (x,t) \longmapsto G\big(x, H_x^{-1}(t)\big)$$

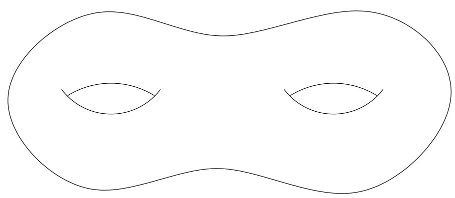
eine Isotopie von f nach g liefert.

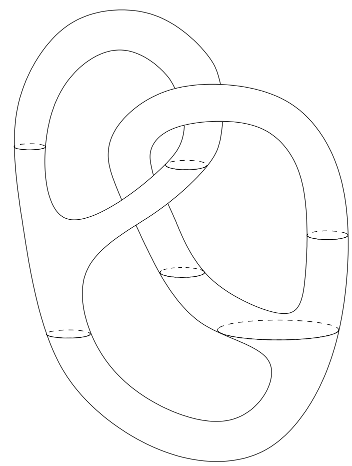
(c) Geben Sie ein Beispiel, daß $(x,t) \mapsto G(x,t)$ im allgemeinen keine Einbettung ist.

b.w.

Aufgabe 3. Ist $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ ein Fluß auf einer Mannigfaltigkeit M, so ist $\Phi|_{M\times[0,1]}$ eine Diffeotopie von M. Geben Sie ein explizites Beispiel einer Diffeotopie an, die nicht Einschränkung eines Flusses ist.

Aufgabe 4. Die folgenden Bilder zeigen zwei Einbettungen der orientierten, geschlossenen Fläche vom Geschlecht 2 in den $\mathbb{R}^3$:





Sind diese Einbettungen isotop?

Abgabe: Mittwoch 23.04.14 in der Vorlesung.