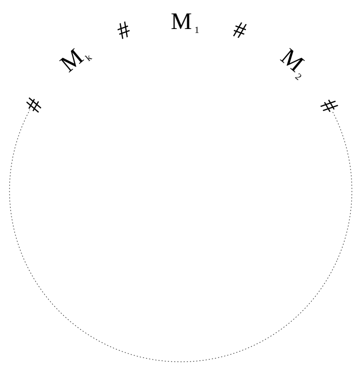
SS 2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie II

Übungsblatt 7

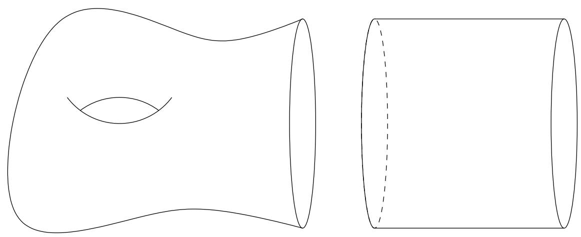
Aufgabe 1. Es seien $M_1, \dots, M_k$ zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, daß die Mannigfaltigkeit



diffeomorph zu $M_1 \# \dots \# M_k \# (S^1 \times S^{n-1})$ ist.

Aufgabe 2. Seien M_1 und M_2 geschlossene, zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, daß $M_1 \# M_2$ kobordant zu $M_1 + M_2$ ist, d.h. es existiert eine kompakte Mannigfaltigkeit W der Dimension $n+1$ mit $\partial W = M_1 \# M_2 + (M_1 + M_2)$. Was kann man im orientierten Fall sagen?

Aufgabe 3. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\varphi\colon \partial M \to \partial M \times \{0\}$ der offensichtliche Diffeomorphismus. Zeigen Sie, daß M diffeomorph zu $M \cup_\varphi \partial M \times [0,1]$ ist, d.h. das Anheften eines Kragens ändert den Diffeomorphietyp nicht.



b.w.

Aufgabe 4. (a) Es seien M und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand, und gegeben seien zwei Diffeomorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \colon \partial M \to \partial B$. Angenommen, es gibt einen Diffeomorphismus $f \colon B \to B$ mit $f|_{\partial B} \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Zeigen Sie, daß dann die Randverheftungen $M \cup_{\varphi_1} B$ und $M \cup_{\varphi_2} B$ diffeomorph sind.

(b) Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei φ_A die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} S^1 & \times & S^1 & \longrightarrow & S^1 & \times & S^1 & \subset & \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \\ (z & , & w) & \longmapsto & (z^a w^c & , & z^b w^d). & & \end{array}$$

Zeigen Sie, daß φ_A ein Diffeomorphismus ist.

(c) Sei M eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f \colon D^2 \times S^1 \to M$ eine Einbettung. Fasse φ_A auf als Abbildung

$$\partial\big(M \setminus f(\overset{\circ}{D}{}^2 \times S^1)\big) \longrightarrow \partial(D^2 \times S^1).$$

Sei M' die Randverheftung

$$\big(M \setminus f(\overset{\circ}{D}{}^2 \times S^1)\big) \cup_{\varphi} D^2 \times S^1.$$

Man sagt, M' entsteht aus M durch **Dehn-Chirurgie**. Zeigen Sie:

(i) M' hängt (bis auf Diffeomorphie) nur von dem Koeffizienten $\frac{d}{b} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ab.

(ii) Für $b = \pm 1$ ist M' das Ergebnis einer elementaren Chirurgie an M.

(iii) Für $b = 0$ ist M' diffeomorph zu M.

Abgabe: Mittwoch 28.05.14 in der Vorlesung.