SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Auf dem Vektorraum $B(X)$ der beschränkten Funktionen $f\colon\ X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X hatten wir eine Norm $\|f\|$ definiert durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)|\colon\ x \in X\}.$$

Zeigen Sie sorgfältig, daß diese Definition tatsächlich dem Axiom (N3) einer Norm genügt, daß also die Dreiecksungleichung

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

für alle $f, g \in B(X)$ erfüllt ist.

Aufgabe 2. Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze

$$d(x,y) := \arctan|x-y|.$$

Zeigen Sie, daß dadurch eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird, und daß die offenen Mengen bezüglich dieser Metrik dieselben sind wie bezüglich der durch $d_{\mathrm{e}}(x,y) = |x-y|$ definierten euklidischen Metrik d_{e}.

Aufgabe 3. Eine Teilmenge A eines metrischen (später allgemeiner: topologischen) Raumes (M,d) heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $M \setminus A$ offen ist. Zeigen Sie:

(i) Die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt unendlich vieler abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen. Gilt dies auch für die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen?

(ii) Falls die Menge M mit der trivialen Metrik versehen wird, so ist jede Teilmenge von M zugleich offen und abgeschlossen.

Gibt es in jedem metrischen Raum Teilmengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind?

b.w.

Aufgabe 4. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $Y \subset M$ eine Teilmenge. Analog zu den Definitionen in Analysis I für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ heiße ein Punkt $x \in M$

- **innerer Punkt** von Y, falls es einen ε-Ball um x gibt, der ganz in Y enthalten ist (insbesondere $x \in Y$);
- **Randpunkt** von Y, falls jeder ε-Ball um x je (mindestens) einen Punkt aus Y und einen Punkt aus $M \setminus Y$ enthält. Die Menge der Randpunkte wird mit ∂Y bezeichnet;
- **Häufungspunkt** von Y, falls jeder ε-Ball um x unendlich viele Punkte aus Y enthält.

Wir nennen $\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ den **Abschluß** oder die **abgeschlossene Hülle** von Y. Die Menge der inneren Punkte von Y wird mit $\mathring{Y}$ notiert und heißt das **Innere** von Y.

Zeigen Sie:

(i) Ein Punkt $x \in M$ ist Häufungspunkt von Y genau dann, wenn $B_\varepsilon(x) \cap Y \setminus \{x\}$ nicht-leer ist für jedes $\varepsilon > 0$.

(ii) Der Rand ∂Y und der Abschluß $\overline{Y}$ sind abgeschlossen.

(iii) Der Abschluß $\overline{Y}$ ist die Vereinigung von Y mit der Menge der Häufungspunkte von Y.

(iv) Für das Innere von Y gilt $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$.

(v) Das Innere $\mathring{Y}$ und der Rand ∂Y sind disjunkt, und $\overline{Y} = \mathring{Y} \cup \partial Y$.

(vi) Es gilt $\partial Y = \partial(M \setminus Y)$.

(vii) Die Menge Y ist offen genau dann, wenn $Y \cap \partial Y = \emptyset$, d.h. $Y = \mathring{Y}$, und abgeschlossen genau dann, wenn $\partial Y \subset Y$, d.h. $\overline{Y} = Y$.

Abgabe: Mittwoch, 15.04.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).