SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei A abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes (M, d) und $f\colon\ A \to A$ eine Abbildung. Es gebe eine Konstante $\lambda \in [0, 1)$, so daß

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y) \quad \text{für alle } \ x, y \in A.$$

(a) Zeigen Sie, daß es höchstens ein $a \in A$ mit $f(a) = a$ gibt. Ein solcher Punkt a heißt **Fixpunkt** der Abbildung f.

(b) Sei ein Punkt $x_0 \in A$ beliebig gewählt, und die Folge (x_n) in A rekursiv definiert durch

$$x_n := f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß diese Folge in A konvergiert, und daß der Grenzwert ein (nach (a), *der*) Fixpunkt von f ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) In einem metrischen Raum ist ein Häufungspunkt einer Folge (x_n) stets Grenzwert einer Teilfolge von (x_n).

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Aufgabe 3. (a) Sei

$$X := \Big\{ \big(x, \sin(1/x)\big) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in \mathbb{R}^+ \Big\} \cup \Big\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ -1 \leq y \leq 1 \Big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Zeigen Sie, daß X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, daß eine offene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Hinweis: Sei $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt und $A \subset X$ die Menge der Punkte, die sich durch einen Weg in X mit x_0 verbinden lassen. Zeigen Sie, daß A offen und abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 4. Die **archimedische Spirale** ist die durch

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

definierte Kurve γ in der Ebene.

(a) Skizzieren Sie diese Kurve.

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$, und $R\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion. In der Analysis I hatten wir gelernt, daß die Menge

$$\Big\{(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2\colon\ \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le R(\varphi)\Big\}$$

den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\varphi)\,d\varphi$$

hat. Sei A_n die Fläche, die berandet wird vom n-ten Umlauf der archimedischen Spirale (d.h. dem durch $2\pi(n-1) \le \varphi \le 2\pi n$ gegebenen Bogen) und dem Teil der x-Achse, der die Endpunkte dieses Bogens verbindet. Sei $B_n := A_n - A_{n-1}$ die Fläche zwischen dem $(n-1)$sten und dem $n$ten Umlauf. Zeigen Sie:

$$\text{(i) } A_1 = 4\pi^3/3, \quad \text{(ii) } B_2 = 6A_1, \quad \text{(iii) } B_{n+1} = nB_2.$$

(c) Berechnen Sie die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt$$

für den ersten Umlauf der archimedischen Spirale. Dabei dürfen Sie verwenden (siehe Bonusaufgabe unten), daß eine Stammfunktion von $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ gegeben ist durch

$$F(t) = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\log\big(t + \sqrt{1+t^2}\big).$$

Bonusaufgabe. Die Funktionen f und F seien wie in Aufgabe 4(c) definiert.

(a) Begründen Sie, warum F auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Zeigen Sie, daß F differenzierbar ist mit $F' = f$.

(c) Zeigen Sie mittels geeigneter Integrationsmethoden, wie man das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1+t^2}\,dt$$

berechnen kann, und wie man auf diese Art herleiten kann, daß eine Stammfunktion von f durch F gegeben ist, ohne F schon im voraus zu kennen.
Hinweis: Die **Hyperbelfunktionen** sind definiert durch $\sinh x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ (sinus hyperbolicus) und $\cosh x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ (cosinus hyperbolicus). Skizzieren Sie die Graphen dieser auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen. Verifizieren Sie $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Dann bietet sich die Substitution $t = \sinh x$ an. (Warum ist diese Substitution zulässig?)

Abgabe: Mittwoch, 29.04.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).