SS 2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & & \big(x(1-y), xy\big) \end{array}$$

den Streifen $\mathbb{R}^+ \times (0,1)$ diffeomorph auf den offenen ersten Quadranten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ abbildet. Berechnen Sie die Jacobische Matrix von ϕ.

(b) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$. Es sei

$$B_1(0) := \big\{v \in V\colon\ \langle v,v\rangle < 1\big\}$$

der offene Einheitsball in V. Zeigen Sie, daß durch

$$v \longmapsto \frac{v}{\sqrt{1-\langle v,v\rangle}}$$

ein Diffeomorphismus $B_1(0) \to V$ definiert wird, und bestimmen Sie dessen Differential.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x,y) = (2,5)$ durch eine C^1-Abbildung

$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$$

mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die Ableitung dieser Abbildung im Punkt $(x,y) = (2,5)$.

Aufgabe 3. Es sei A eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Setze

$$\mu := \max\big\{x^{\mathrm{t}}Ax\colon\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\big\}.$$

Zeigen Sie mittels der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, daß μ ein Eigenwert von A ist, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, mit $Ax = \mu x$.

b.w.

Aufgabe 4. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wir betrachten das **Ellipsoid**

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ h(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Die **Tangentialebene** T an M in einem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$ ist definiert als die affine Ebene durch (x_0, y_0, z_0), die orthogonal zum Gradienten von h in diesem Punkt steht. Im folgenden sei stets angenommen, daß die drei Koordinaten x_0, y_0, z_0 positiv sind.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T durch $(x_0, y_0, z_0) \in M$.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A, B, C von T mit den drei Koordinatenachsen.

(c) Die affine Ebene T schneidet aus dem ersten Oktanten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ein Tetraeder mit den vier Ecken A, B, C und Ursprung aus, d.h. die vier Dreieckseiten dieses Tetraeders liegen in den Koordinatenebenen bzw. in der Tangentialebene. Zeigen Sie, daß das Volumen dieses Tetraeders gegeben ist durch

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(abc)^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

Dabei dürfen Sie verwenden, daß das Volumen eines Tetraeders (oder allgemeiner einer Pyramide) gegeben ist durch

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$$

(d) Finden Sie den Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$, für den dieses Volumen V minimal wird. Zeigen Sie, daß es sich dabei um den Schwerpunkt des entsprechenden Dreieckes ABC handelt.

Abgabe: Mittwoch, 17.06.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).