SS 2015 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mit dem iterativen Verfahren aus dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf eine Lösung α der Differentialgleichung

$$\dot{x} = 3t^2 x,$$

mit Anfangsbedingung $\alpha(0) = x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 2. Diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Bestimmen Sie jeweils explizit eine Lösung α mit vorgegebenem Startwert $\alpha(0) = x_0$ im angegebenen Intervall, und geben Sie das maximale Lösungsintervall an.

(i) $\dot{x} = x^3/2, \quad x_0 \in \mathbb{R}^+;$

(ii) $\dot{x} = \mathrm{e}^x \cos t, \quad x_0 \in \mathbb{R};$

(iii) $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}/x, \quad 0 < x_0 < 1.$

Aufgabe 3. (a) Sei $h\colon [a,b) \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion ($b = \infty$ ist zugelassen) mit divergierendem uneingentlichem Integral

$$\int_a^b \frac{1}{h(x)}\, dx,$$

das heißt

$$\int_a^s \frac{1}{h(x)}\, dx \longrightarrow \infty \text{ für } s \longrightarrow b, s < b.$$

Zeigen Sie, daß es für jedes $x_0 \in [a,b)$ eine streng monoton wachsende Lösung $\alpha\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\dot{x} = h(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$ gibt, und daß $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = b$ gilt.

(b) Die Differentialgleichung $\ddot{x} = g - \rho \dot{x}^\beta$ (g = Erdbeschleunigung, β, ρ positive Konstanten) beschreibt einen durch Reibung gebremsten Fall eines Körpers im Schwerefeld der Erde.

Zeigen Sie: Es gibt auf $\mathbb{R}_0^+$ eine Lösung α mit $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ und $\ddot{\alpha} \geq 0$. Diese hat die "Endgeschwindigkeit" $v_\infty := \lim_{t\to\infty} \dot{\alpha}(t) = (g/\rho)^{1/\beta}$. Berechnen Sie die Lösung explizit für $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

b.w.

Aufgabe 4. Es seien G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $v\colon G \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto v(t,x)$ eine reellwertige Funktion auf G. Wir betrachten eine Lösung α der Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(t,x).$$

Zeigen Sie, daß man die Kurve $t \mapsto (t, \alpha(t))$ als Integralkurve des Vektorfeldes

$$(t,x) \mapsto V(t,x) := (1, v(t,x))$$

auf G interpretieren kann.

Skizzieren Sie das Vektorfeld V für die folgenden Differentialgleichungen, und bestimmen Sie die Integralkurven von V.

(i) $\dot{x} = x/t$ auf $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$;

(ii) $\dot{x} = -t/x$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$;

(iii) $\dot{x} = t/x$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Abgabe: Mittwoch, 24.06.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).