SS 2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Einhängung ΣS^n der n-Sphäre S^n homöomorph zu S^{n+1} ist.

(b) Ist $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung und $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus, wenn man $f(X)$ die durch Y induzierte Topologie gibt, so heißt f eine **Einbettung**. Zeigen Sie:

(i) Jede stetige und injektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist eine Einbettung.

(ii) Die Abbildung $f\colon [0,2\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^5$ gemäß

$$f(x,y) = \bigl(\cos x, \cos 2y, \sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y\bigr)$$

induziert eine Einbettung der Kleinschen Flasche in den $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 2. (a) Die Menge der reellen $(n\times n)$-Matrizen $\mathcal{M}(n\times n,\mathbb{R})$ kann in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden. Dies induziert eine Topologie auf der Gruppe der invertierbaren $(n\times n)$-Matrizen $\mathrm{GL}(n) \subset \mathcal{M}(n\times n,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}(n)$ mit dieser Topologie eine topologische Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Gruppe der orthogonalen $(n\times n)$-Matrizen $\mathrm{O}(n)$ mit der durch die Inklusion $\mathrm{O}(n)\subset\mathrm{GL}(n)$ induzierten Topologie eine *kompakte* topologische Gruppe ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{O}(n)$ unter der in (a) beschriebenen Identifikation eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

(c) Ein **Isomorphismus** von topologischen Gruppen G_1 und G_2 ist ein Homöomorphismus $G_1 \to G_2$, der gleichzeitig ein Gruppenisomorphismus ist. Zeigen Sie, daß die multiplikative Gruppe $S^1\subset\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathrm{SO}(2)$ ist.

Aufgabe 3. Die **Quaternionen** sind definiert als 4-dimensionaler reeller Vektorraum

$$\mathbb{H} := \{a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \,:\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

auf dem eine assoziative Multiplikation durch die Regel

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

und Distributivität erklärt ist. Die Topologie auf $\mathbb{H}$ ist durch die Identifikation mit $\mathbb{R}^4$ gegeben. Die euklidische Norm ist $|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und das zu $a \in \mathbb{H}$ **konjugierte** Element sei

$$\bar{a} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}\ .$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ und $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$.

(b) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

(c) Für $a \neq 0$ ist $\bar{a}/|a|^2$ das inverse Element zu a bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{H}$.

(d) $|ab| = |a||b|$.

(e) Die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{H}$ mit der von $\mathbb{H}$ induzierten Topologie und Multiplikation ist eine topologische Gruppe.

Aufgabe 4. (a) Beschreiben Sie eine Operation der Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf dem Torus, die den Zylinder als Orbitraum hat.

(b) Wenn $K \subset \mathbb{R}^3$ den Kreis in der xz-Ebene um den Punkt $(0, 0, 1)$ vom Radius $1/2$ bezeichne, dann ist eine Einbettung des 2-Torus in den $\mathbb{R}^3$ durch Rotation von K um die x-Achse gegeben. Begründen Sie anschaulich, daß die Operation von $\mathbb{Z}_2$ auf dem Torus, die durch Rotation um 180° um die z-Achse definiert ist, einen Orbitraum hat, der homöomorph zur 2-Sphäre ist.

Abgabe: Mittwoch 3.5.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)