SS 2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Der n-dimensionale reell projektive Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist der Quotientenraum von S^n, der durch die Identifikation von Antipodenpunkten entsteht, d.h. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := S^n/\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in S^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y = -x$.

Identifizieren Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum der rein imaginären Quaternionen, d.h. mit Quaternionen der Form $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, und S^3 mit dem Raum der Quaternionen der Länge 1. Zeigen Sie:

(a) Konjugation von $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ mit einem Element aus $S^3 \subset \mathbb{H}$ definiert ein Element aus SO(3), d.h. die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a & \longmapsto & uau^{-1} \end{array}$$

ist für jedes $u \in S^3$ eine spezielle orthogonale Abbildung (also eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um eine geeignete Achse).

(b) Die so definierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & \mathrm{SO}(3) \\ u & \longmapsto & \{a \mapsto uau^{-1}\} \end{array}$$

ist ein stetiger, surjektiver Homomorphismus von topologischen Gruppen mit Kern $\{\pm 1\}$.

(c) Folgern Sie, daß SO(3) zu $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ homöomorph ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede stetige Abbildung $f\colon X \to S^n$, die nicht surjektiv ist, ist **nullhomotop**, d.h. homotop zu einer Abbildung, die ganz X auf einen einzigen Punkt in S^n abbildet.

(b) Je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to CY$ sind homotop zueinander. (Hier bezeichnet CY den Kegel über Y.)

(c) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ist nullhomotop genau dann, wenn sie zu einer stetigen Abbildung $CX \to Y$ erweitert.

Aufgabe 3. Für topologische Räume X, Y sei mit $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $X \to Y$ bezeichnet. Die von einer Abbildung $f\colon X \to Y$ repräsentierte Homotopieklasse sei mit $[f]$ bezeichnet.

Betrachte S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$, und damit als topologische Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen. Für stetige Abbildungen $f, g\colon X \to S^1$ definiere man die Abbildung $f \cdot g\colon X \to S^1$ durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$. Zeigen Sie, daß die Verknüpfung $[f] * [g] := [f \cdot g]$ wohldefiniert ist, und daß $\big([X, S^1], *\big)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 4. Seien u und v Schleifen in einer topologischen Gruppe G mit Basispunkt e, dem Einselement von G. Sei $u * v$ die durch $u * v(s) = \mu(u(s), v(s))$, $s \in [0, 1]$, definierte Schleife, wobei $\mu\colon G \times G \to G$ die Multiplikation in G bezeichnet. Zeigen Sie, daß

$$uv \simeq u * v \simeq vu \ \text{ rel } \{0, 1\},$$

und folgern Sie daraus, daß $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Abgabe: Mittwoch 10.5.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)