SS 2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Man fasse S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus $f_*\colon\ \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, wenn

(i) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi/2)}$,

(ii) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ für $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\theta)}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $f\colon\ S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definiere wie in der Vorlesung

$$X \cup_f D^2 = (X + D^2)/x \sim f(x) \text{ für } x \in S^1 = \partial D^2.$$

(a) Zeigen Sie: Falls $f, g\colon\ S^1 \to X$ homotope Abbildungen sind, so gilt

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2.$$

(b) Die Narrenkappe ist der topologische Raum, den man aus einem gleichseitigen Dreieck erhält, indem man die drei Seiten wie in Abbildung 1 angegeben identifiziert. Beschreiben Sie die Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einer geeigneten Abbildung $f\colon\ S^1 \to S^1$ und zeigen Sie mit (a), daß die Narrenkappe zusammenziehbar ist.

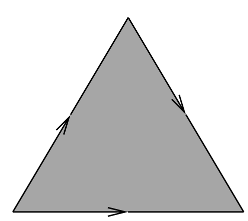

Abbildung 1: Die Narrenkappe.

b.w.

Aufgabe 3. Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation

$$(x_0,\dots,x_n) \sim (y_0,\dots,y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon\ (x_0,\dots,x_n) = (\lambda y_0,\dots,\lambda y_n).$$

Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0,\dots,x_n)$ bezeichnet man mit **homogenen Koordinaten** $[x_0 : \ldots : x_n]$. (Dieser Name erklärt sich daraus, daß $[x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n]$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.) Man kann $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen.

Die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit ∞ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ seien genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Zeigen Sie:

(a) $\widehat{\mathbb{C}}$ ist tatsächlich ein kompakter topologischer Raum. (Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls für jedes System von offenen Mengen $\{U_\alpha\colon\ \alpha \in A\}$ (mit A einer beliebigen Indexmenge), das $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ erfüllt, eine Auswahl von endlich vielen Mengen $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_m}$ existiert mit $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_m}$.)

(b) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß ein topologischer Raum genau dann einfach zusammenhängend ist, wenn er wegzusammenhängend ist und je zwei Wege u, v zwischen je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ homotop rel $\{0,1\}$ sind.

(b) Sei X ein zusammenziehbarer und Y ein wegzusammenhängender Raum. Zeigen Sie:

(i) $X \times Y \simeq Y$, d.h. $X \times Y$ hat den selben Homotopietyp wie Y;

(ii) je zwei Abbildungen von Y nach X sind homotop zueinander; und

(iii) je zwei Abbildungen von X nach Y sind homotop zueinander.

Abgabe: Mittwoch 17.5.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)