SS 2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

# Topologie

Übungsblatt 8

**Aufgabe 1.** Schreibe $\Sigma_{g,r}$ für die Fläche mit Rand, die man aus $\#_g T^2$ durch das Entfernen des Inneren von $r$ disjunkten 2-Scheiben erhält, und $N_{h,s}$ für $\#_h \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mit dem Inneren von $s$ disjunkten 2-Scheiben entfernt.

(a) Zeigen Sie, daß man $\Sigma_{g,r}$ aus einem $(4g+3r)$-gon durch Identifizieren der Seiten mittels des Wortes

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} x_1 y_1 x_1^{-1} \dots x_r y_r x_r^{-1}$$

erhalten kann.

(b) Finden Sie entsprechend ein Wort, das $N_{h,s}$ beschreibt.

(c) Geben Sie eine Präsentation für die Fundamentalgruppe von $\Sigma_{g,r}$ bzw. $N_{h,s}$ an, und bestimmen Sie die abelsch gemachte Fundamentalgruppe (d.h. die Gruppe, die man durch Hinzunahme aller Relationen $xyx^{-1}y^{-1}$ für $x, y \in \pi_1$ erhält).

(d) Zeigen Sie, daß $\Sigma_{g,r} \cong \Sigma_{g',r'}$ nur für $g = g'$ und $r = r'$ gilt; analog für $N_{h,s}$. Zeigen Sie außerdem, daß keine der Flächen (mit Rand) $\Sigma_{g,r}$ homöomorph zu einer Fläche $N_{h,s}$ ist.

**Aufgabe 2.** Sei $F$ eine Fläche. Ein Homöomorphismus $h\colon U \to U'$ mit $U \subset F$ und $U' \subset \mathbb{R}^2$ offene Mengen — aus der Definition von 'Fläche' — heißt **Karte**. Eine Menge von Karten

$$\bigl\{h_i\colon U_i \to U_i' \,|\, i \in \Lambda\bigr\},$$

wobei $\Lambda$ eine Indexmenge ist, heißt **Atlas** von $F$, falls $\cup_{i\in\Lambda} U_i = F$ gilt. Ein solcher Atlas heißt **differenzierbar**, falls jeder **Kartenwechsel**

$$h_j \circ h_i^{-1}\colon\ h_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow h_j(U_i \cap U_j)$$

zwischen den jeweiligen offenen Mengen des $\mathbb{R}^2$ differenzierbar im Sinne der Analysis II ist. Eine Fläche mit einem differenzierbaren Atlas heißt **differenzierbare Fläche**.

Eine differenzierbare Fläche (evtl. mit Rand) heißt **orientierbar**, wenn es einen differenzierbaren Atlas gibt, bei dem alle Kartenwechsel in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches eine Jacobische Matrix mit positiver Determinante haben.

b.w.

(a) Geben sie einen Atlas für $S^2$ an, der diese Eigenschaft hat.

Hinweis: Wenn Sie mit den stereographischen Projektionen von den Polen arbeiten, genügen zwei Karten. (Wie muß man eine der beiden Projektionen modifizieren, um die Orientierungsbedingung zu erfüllen?) Alternativ kann man z.B. die Orthogonalprojektionen von Hemisphären auf die entsprechende Koordinatenebene verwenden.

(b) Zeigen Sie, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

**Aufgabe 3.** Eine Fläche heißt **geschlossen**, wenn sie kompakt und ohne Rand ist. Nach dem Klassifikationssatz aus der Vorlesung sind dies genau die Flächen $\#_g T^2$, $g \geq 0$, und $\#_h \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $h \geq 1$. Ganz ähnlich wie in Aufgabe 2 kann man zeigen, daß darunter genau die $\#_g T^2$, $g \geq 0$, orientierbar sind. Zeigen Sie, daß man aus einer geschlossenen, nicht-orientierbaren Fläche durch Aufschneiden entlang einer einzigen einfach geschlossenen Kurve (d.h. einer geschlossenen Kurve ohne Doppelpunkte) eine orientierbare Fläche mit Rand erhalten kann.

**Aufgabe 4.** (a) Sei $h\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie, daß durch $\tilde{h}(tx) := t\,h(x)$ für $x \in S^{n-1}$ und $t \in [0,1]$ ein Homöomorphismus $\tilde{h}\colon D^n \to D^n$ definiert wird.

(b) Sei $X$ ein topologischer Raum und seien $\varphi_1, \varphi_2\colon S^{n-1} \to X$ Einbettungen (d.h. Homöomorphismen auf das Bild) mit $\varphi_1(S^{n-1}) = \varphi_2(S^{n-1})$. Zeigen Sie, daß die durch Anheften einer $n$-Scheibe $D^n$ vermöge dieser Abbildungen enstehenden Räume, $X \cup_{\varphi_1} D^n$ und $X \cup_{\varphi_2} D^n$, homöomorph zueinander sind.

**Bonusaufgabe.** Sei $F$ eine kompakte, zusammenhängende Fläche. Zeigen Sie, wie man ausgehend von einer Triangulierung von $F$ eine Henkelzerlegung erhalten kann. Wie erhält man eine Henkelzerlegung, die neben den 1-Henkeln jeweils nur einen 0-Henkel und einen 2-Henkel besitzt?

Abgabe: Mittwoch 21.6.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)