

Topologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.17 aus der Vorlesung, indem Sie zeigen, daß $\text{im } j_* = \ker \Delta$ und $\text{im } \Delta = \ker i_*$.

Aufgabe 2. (a) Die Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

sei exakt. Zeigen Sie, daß dann α ein Isomorphismus ist und G isomorph zu \mathbb{Z}_6 .

(b) Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz *abelscher* Gruppen. Zeigen Sie:

(i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Es gibt einen Homomorphismus $\lambda: C \rightarrow B$, so daß $\beta \circ \lambda = \text{id}_C$.
- Es gibt einen Homomorphismus $\mu: B \rightarrow A$, so daß $\mu \circ \alpha = \text{id}_A$.

Unter diesen Bedingungen sagt man, daß die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Zeigen Sie weiter, daß dann $B \cong A \oplus C$.

N.B.: Eine spaltende kurze exakte Sequenz *nicht-abelscher* Gruppen A, B, C entspricht im allgemeinen einem sogenannten *semi-direkten* Produkt von A und C .

(ii) Ist C eine freie abelsche Gruppe, so spaltet jede kurze exakte Sequenz der obigen Form. (Falls Ihnen der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereitet, diskutieren Sie zumindest den Fall $C \cong \mathbb{Z}$.)

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß jede exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_m \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

mit m und n teilerfremd spaltet.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{n^2} \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0.$$

Spaltet diese Sequenz?

(c) Geben Sie für $n \geq 2$ zwei nicht zueinander isomorphe abelsche Gruppen G an, für die eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

existiert.

Aufgabe 4. Berechnen Sie mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz die Homologie

- (i) der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$, aufgefaßt als der Raum, den man durch Verkleben eines Möbiusbandes mit einer 2-Scheibe erhält;
- (ii) des 2-Torus, erhalten durch das Verkleben zweier Zylinder;
- (iii) der Kleinschen Flasche, ebenfalls erhalten durch das Verkleben zweier Zylinder.

Bonusaufgabe. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5 \end{array}$$

Bestimmen Sie die minimalen Annahmen an f_1, f_2, f_4, f_5 (bzgl. Injektivität und Surjektivität), die garantieren, daß f_3

- (i) injektiv
- (ii) surjektiv
- (iii) bijektiv

ist. Zeigen Sie durch Beispiele, daß diese Annahmen nicht weiter abgeschwächt werden können.