

Topologie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß

$$S^{m+n+1} \cong (S^m \times D^{n+1}) \cup (D^{m+1} \times S^n)$$

mit

$$(S^m \times D^{n+1}) \cap (D^{m+1} \times S^n) = S^m \times S^n.$$

Betrachten Sie dazu den Rand von

$$D^{m+n+2} \cong D^{m+1} \times D^{n+1},$$

oder arbeiten Sie mit expliziten Koordinaten für $S^{m+n+1} \subset \mathbb{R}^{m+n+2}$.

(b) Zeigen Sie mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz, daß für $m \neq n$ gilt:

$$H_q(S^m \times S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, m, n, m+n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Was gilt für $H_q(S^m \times S^m)$?

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $z \mapsto z^n$ der komplexen Ebene in sich selbst (für gegebenes $n \in \mathbb{N}$) eindeutig erweitert zu einer stetigen Abbildung von S^2 in sich selbst (vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 3).

(b) Was ist der Abbildungsgrad dieser Abbildung?

Aufgabe 3. Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ mit $\deg(f) = k$.

Aufgabe 4. Schreibe S^n , $n \geq 2$, als Vereinigung der nördlichen Hemisphäre D_+^n und der südlichen Hemisphäre D_-^n . Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung mit $f(D_\pm^n) \subset D_\pm^n$. Mit $S^{n-1} := D_+^n \cap D_-^n$ ist $f|_{S^{n-1}}$ eine stetige Abbildung $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Zeigen Sie, daß $\deg(f) = \deg(f|_{S^{n-1}})$.

b.w.

Bonusaufgabe. Geben Sie eine geometrische Beschreibung des Homomorphismus Δ in der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 7.18) für die Zerlegung eines Komplexes K in zwei Unterkomplexe L und M . Mit anderen Worten: Gegeben ein q -Zykel x in $K = L \cup M$, wie findet man geometrisch einen $(q - 1)$ -Zykel z in $L \cap M$, so daß $\Delta[x] = [z]$?

Bonusaufgabe. Bestimmen Sie die Euler-Charakteristik der Flächen S^2 , $\#_g T^2$ und $\#_h \mathbb{R}P^2$. Welche Euler-Charakteristik hat die Fläche mit Rand, die man aus einer der obigen Flächen erhält, indem man k disjunkte offene Kreisscheiben herausschneidet?

Abgabe: Mittwoch 19.7.17
bis spätestens 16:00 Uhr im Briefkasten
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock)