SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Es sei $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$ die Vereinigung von $\mathbb{R}$ mit einem zusätzlichen Punkt $*$. Wir nennen eine Teilmenge $U \subset X$ offen, falls sie eine der folgenden Eigenschaften hat:

(i) $U \subset \mathbb{R}$ ist offen in der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$,

(ii) $U = \big(V \setminus \{0\}\big) \cup \{*\}$ mit $V \subset \mathbb{R}$ offen und $0 \in V$,

(iii) $U = V \cup \{*\}$ mit $V \subset \mathbb{R}$ offen und $0 \in V$.

Zeigen Sie:

(a) Dies definiert eine Topologie auf X, die nicht Hausdorffsch ist. Insbesondere ist diese Topologie nicht metrisch.

(b) Die Folge $x_n = 1/n$ konvergiert in X. Was sind die möglichen Grenzwerte?

Aufgabe 2. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Homöomorphismus**, falls f bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

Zeigen Sie, daß die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{C}^*$ und der Zylinder

$$Z := \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1^2 + x_2^2 = 1\big\} \subset \mathbb{R}^3$$

(mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie) homöomorph sind. Verifizieren Sie dazu, daß durch

$$z = x + \mathrm{i}y \longmapsto \left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}, \log|z|\right)$$

ein Homöomorphismus $\mathbb{C}^* \to Z$ beschrieben wird.

Aufgabe 3. Sei (M, d) ein metrischer Raum und P ein Punkt in M. Man definiere $d_P(x,x) = 0$ und $d_P(x,y) = d(x,P) + d(P,y)$ für $x, y \in M$, $x \neq y$.

(a) Zeigen Sie, daß dies eine Metrik d_P auf M definiert.

(b) Man nennt d_P die 'französische Eisenbahnmetrik' – warum?

(c) Sei (x_k) eine Folge in M. Zeigen Sie (bezüglich der Metrik d_P):

(i) $\lim x_k = a \neq P$ genau dann, wenn $x_k = a$ für fast alle k;

(ii) $\lim x_k = P$ genau dann, wenn $d(x_k, P) \to 0$.

Machen Sie sich die Aufgabe evtl. erst am $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik d klar.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei $\|.\|_\infty$ die Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup\big\{|f(x)|:\ x \in [a,b]\big\}$$

auf dem Vektorraum $W := C^0([a,b])$ der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$. Auf dem Vektorraum $V := C^1([a,b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Zeigen Sie:

(a) Dies definiert eine Norm auf V.

(b) Bezüglich dieser Norm ist V ein Banachraum.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, wie in der Vorlesung gezeigt, daß eine Cauchy-Folge (f_k) bzgl. $\|.\|_\infty$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, die außerdem stetig ist, falls die f_k stetig sind. Sei also (f_k) eine Cauchy-Folge in V, und $f \in W$ (sic!) der gleichmäßige Limes dieser Folge. Sei weiter $g \in W$ der gleichmäßige Limes der Folge (f'_k). Zeigen Sie durch Betrachten des Integrals

$$\int_a^x g(t)\,dt,$$

daß $f \in V$ und $f' = g$. Dazu benötigen Sie aus der Analysis I den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und die Vertauschbarkeit von Limes und Integral bei gleichmäßiger Konvergenz.

(c) Die Abbildung $V \to W$, $f \mapsto f'$ ist stetig.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß der in Aufgabe 1 beschriebene topologische Raum X **lokal homöomorph** zu $\mathbb{R}$ ist, d.h. zu jedem Punkt $x \in X$ findet man eine Umgebung U von x in X, die homöomorph zu einem offenen Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

Abgabe: Montag, 15.4.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
**Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an,
andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!**