SS 2019 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei A eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d). Der **Abstand** eines Punktes $x \in M$ von A ist definiert als

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \colon\ a \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß
$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$, und g sei die Gerade
$$g = \{a + tb \colon\ t \in \mathbb{R}\}.$$
Es sei d der euklidische Abstand auf dem $\mathbb{R}^n$. Schreiben Sie die Abstandsfunktion $d(x, g)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ explizit als Funktion von x, a und b.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) In einem metrischen Raum ist ein Häufungspunkt einer Folge (x_n) stets Grenzwert einer Teilfolge von (x_n).

(b) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Aufgabe 3. (a) Sei
$$X := \Big\{\big(x, \sin(1/x)\big) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x \in \mathbb{R}^+\Big\} \cup \Big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ -1 \leq y \leq 1\Big\} \subset \mathbb{R}^2,$$
versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Skizzieren Sie diese Menge. Zeigen Sie, daß X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, daß eine offene Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Hinweis: Sei $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt und $A \subset X$ die Menge der Punkte, die sich durch einen Weg in X mit x_0 verbinden lassen. Zeigen Sie, daß A offen und abgeschlossen in X ist.

Abgabe: **Dienstag, 23.4.19**
bis spätestens **12 Uhr** in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).