SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei D eine offene Menge im $\mathbb{R}^3$ und $v = (v_1, v_2, v_3)\colon\ D \to \mathbb{R}^3$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld, d.h. die Komponentenfunktionen $v_1, v_2, v_3\colon\ D \to \mathbb{R}$ seien partiell differenzierbar. Die **Rotation** von v ist das Vektorfeld $\operatorname{rot} v\colon\ D \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$(\operatorname{rot} v)(x) := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x)\right), \quad x \in D$$

(formal kann man die Rotation als Kreuzprodukt interpretieren: $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$).

Seien v und $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) - (\triangle v_1, \triangle v_2, \triangle v_3)$, wobei $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der **Laplace-Operator** ist.

Dabei darf verwendet werden, daß bei einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion die partiellen Ableitungen miteinander kommutieren, d.h. ist $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. (Dies wird in der Vorlesung noch gezeigt.)

Aufgabe 2. Der Vektorraum $\mathcal{M}$ aller $(n \times n)$-Matrizen kann mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden, der Vektorraum $\mathcal{S}$ der *symmetrischen* $(n \times n)$-Matrizen (d.h. Matrizen $A \in \mathcal{M}$ mit $A^{\mathrm{t}} = A$) mit $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, indem man z.B. die Einträge a_{ij} mit $i \leq j$, d.h. auf und oberhalb der Diagonale, als Koordinaten nimmt.

Durch $A \mapsto A^{\mathrm{t}}A$ ist eine Abbildung $f\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist, und daß das Differential $d_A f$ gegeben ist durch $d_A f(h) = A^{\mathrm{t}}h + h^{\mathrm{t}}A \in \mathcal{S}$.

(b) Sei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, daß $d_A f\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ in jedem Punkt $A \in \mathrm{O}(n)$ der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(n) := f^{-1}(E) \subset \mathcal{M}$ surjektiv ist.

Bemerkung: Wir werden später sehen, daß man aufgrund dieser Informationen die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ als sogenannte *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ interpretieren kann.

Aufgabe 3. Sei $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b.w.

Zeigen Sie, daß f überall zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie explizit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).$$

Gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Ist f im Nullpunkt stetig?

Aufgabe 4. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes als *Quellstärke* zu verstehen. Dazu sei ein differenzierbares Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben. Im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $\varepsilon > 0$, d.h. das Parallelepiped, das von den Vektoren εe_i, $i = 1, \dots, n$, im Punkt a aufgespannt wird.

Nun lassen wir diesen Würfel unter dem Einfluß von v 'fließen'. Dies bedeutet, daß sich jeder Punkt auf einer Bahn γ bewegt, deren Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t)$ in jedem gegebenen Bahnpunkt $\gamma(t)$ gleich dem Vektor $v(\gamma(t))$ ist.

Für kleine Zeiten t ergibt sich in erster Näherung, daß sich der Eckpunkt a des Würfels nach $a + tv(a)$ bewegt, die Eckpunkte $a + \varepsilon e_i$ nach $a + \varepsilon e_i + tv(a + \varepsilon e_i)$. Wir erhalten also ein neues Parallelepiped, das von den Vektoren

$$u_i(\varepsilon, t) := \varepsilon e_i + t\big(v(a + \varepsilon e_i) - v(a)\big),\ \ i = 1, \dots, n,$$

aufgespannt wird.

Nun endlich zur Aufgabenstellung: Sei $V_\varepsilon(t)$ das Volumen dieses Parallelepipeds, d.h.

$$V_\varepsilon(t) = \det\big(u_1(\varepsilon,t), \dots, u_n(\varepsilon,t)\big),$$

wobei wir die $u_i(\varepsilon, t)$ als Spaltenvektoren einer $(n \times n)$-Matrix auffassen. Berechnen Sie $V_\varepsilon'(0)$, und zeigen Sie, daß

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_\varepsilon'(0)}{V_\varepsilon(0)} = \operatorname{div} v(a).$$

Die Divergenz ist also in der Tat ein Maß dafür, wie sich ein 'infinitesimales' Volumen unter dem 'Fluß' des Vektorfeldes ausdehnt (bei positiver Divergenz) oder zusammenzieht (bei negativer Divergenz).

Bonusaufgabe. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f\colon\ D \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion, und $\gamma\colon\ (-\varepsilon, \varepsilon) \to D$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = a$. Zeigen Sie, daß der Geschwindigkeitsvektor $(\gamma'(0), (f \circ \gamma)'(0))$ der Kurve $t \mapsto (\gamma(t), (f \circ \gamma)(t))$ im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ in dem Unterraum

$$\big\{(h, d_a f(h)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\colon\ h \in \mathbb{R}^n\big\}$$

liegt, und daß jeder Vektor in diesem Unterraum so realisiert werden kann. Wenn man sich die Tangentialvektoren im Punkt $(a, f(a))$ 'angeheftet' vorstellt, spannen diese also den affinen Unterraum

$$\big\{(a, f(a)) + (h, d_a f(h)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\colon\ h \in \mathbb{R}^n\big\}$$

auf.

Abgabe: Montag, 6.5.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).