SS 2019

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, B.Sc.
Laura Jaust, B.Sc.

Analysis II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $f \in C^2([a,b])$, und es gelte

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f' > 0 \text{ und } f'' > 0 \text{ auf } [a,b].$$

Für einen Startwert x_0 definieren wir die Folge (x_n) rekursiv, wie in der Vorlesung geometrisch motiviert, durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f besitzt eine eindeutige Nullstelle $z \in [a,b]$.

(b) Für $x_0 = b$ konvergiert die Folge (x_n) streng monoton fallend gegen z. Verifizieren Sie insbesondere, daß die Folge nicht aus $[a,b]$ hinausführt.

(c) Startet man mit $x_0 = a$, und gilt $x_1 \in [a,b]$, so ist die Folge ab $n = 1$ streng monoton fallend.

(d) Das Verfahren konvergiert quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|x_{n+1} - z| \leq c\,|x_n - z|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie für die Aufgabenteile (b)-(d) in geeigneter Weise eine Taylor-Entwicklung von f.

Aufgabe 2. Sei $\Delta\colon C^2(\mathbb{R}^2) \to C^0(\mathbb{R}^2)$ der Laplace-Operator auf dem $\mathbb{R}^2$ (vergl. Übungsblatt 5), d.h. für eine zweifach stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ ist Δf die stetige Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Ist $\phi\colon U \to V$ ein C^2-Diffeomorphismus von offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$, so kann man einen neuen Differentialoperator $\widetilde{\Delta}$ auf U definieren durch die Gleichung

$$(\Delta f) \circ \phi = \widetilde{\Delta}(f \circ \phi).$$

Dies entspricht dem folgenden kommutativen Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} C^2(V) & \xrightarrow{\Delta} & C^0(V) \\ {\scriptstyle f \mapsto f\circ\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g \mapsto g\circ\phi} \\ C^2(U) & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} & C^0(U) \end{array}$$

Interpretiert man ϕ als einen Koordinatenwechsel, so ist $\widetilde{\Delta}$ nichts anderes als der Laplace-Operator bezüglich der neuen Koordinaten.

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Laplace-Operator in Polarkoordinaten zu beschreiben. Sei dazu ϕ der Koordinatenwechsel von Polarkoordinaten (r, φ) zu kartesischen Koordinaten (x,y), d.h.

$$\phi(r,\varphi) = (x,y) \quad \text{mit} \quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

mit $U = \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi)$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\colon\ x \leq 0,\ y = 0\}$.

b.w.

(a) Berechnen Sie mittels der Kettenregel die Ableitungen $(f \circ \phi)_r$ und $(f \circ \phi)_\varphi$, und zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f_x \circ \phi &= (f \circ \phi)_r \cdot \cos\varphi - (f \circ \phi)_\varphi \cdot \frac{1}{r} \sin\varphi, \\ f_y \circ \phi &= (f \circ \phi)_r \cdot \sin\varphi + (f \circ \phi)_\varphi \cdot \frac{1}{r} \cos\varphi. \end{aligned}$$

Hier bezeichnen die Indizes partielle Ableitungen, also $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ etc.

(b) Zeigen Sie, daß der Laplace-Operator in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 3. Die Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei homogen vom Grad 2, d.h. es gelte $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f eine quadratische Form ist, d.h. es existiert eine reelle $(n \times n)$-Matrix A, so daß $f(x) = x^{\mathsf{t}} A x$. Bestimmen Sie die Matrix A.

Aufgabe 4. (a) Im $\mathbb{R}^n$ seien k (nicht notwendig verschiedene) Punkte $a_1, \ldots, a_k$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Summe der Abstandsquadrate

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} |x - a_j|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

genau ein lokales Minimum hat, und zwar im Schwerpunkt $x_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j$ des Punktesystems. Begründen Sie, warum dort tatsächlich das globale Minimum der Funktion f angenommen wird, d.h. $f(x) > f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

(b) Im $\mathbb{R}^2$ seien drei (nicht notwendig verschiedene) Punkte a, b, c gegeben. Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei

$$g(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$$

die Summe der Abstände zu diesen drei Punkten. Beachten Sie, daß die Funktion g nur auf der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}$ stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie, daß die Funktion g ein eindeutiges globales Minimum hat, und zwar — je nach Lage der drei Punkte — in einem der Punkte a, b, c oder in einem Punkt x_0 mit der Eigenschaft, daß die Geradensegmente von x_0 nach a, b bzw. c in x_0 paarweise einen Winkel von 120 Grad einschließen. Unter welcher Bedingung an a, b, c tritt der eine oder der andere Fall ein? Skizzieren Sie dazu das Gradientenfeld ∇g z.B. in der Nähe des Punktes a, in Abhängigkeit von dem Winkel, den die Vektoren $b - a$ und $c - a$ bilden.

Abgabe: Montag, 27.5.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).