SS 2020

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei f eine ganze Funktion, d.h. eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Es gebe eine natürliche Zahl m und positive Konstanten M, R, so daß $|f(z)| \leq M|z|^m$ für alle komplexen Zahlen z mit $|z| \geq R$ gilt. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist.

Aufgabe 2. Sei f eine ganze, nichtkonstante Funktion. Zeigen Sie, daß die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Hinweis: Führen Sie die Annahme, daß es eine offene Scheibe $D_\varepsilon(w_0)$ im Komplement von $f(\mathbb{C})$ gibt, zu einem Widerspruch zu einem wichtigen Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 3.

(a) Sei f eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie, daß die Potenzreihenentwicklung von f um 0 nur reelle Koeffizienten hat. Insbesondere gilt also $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

(b) Seien f eine ganze Funktion und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Zeigen Sie, daß g die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen auf $\mathbb{C}$ erfüllt, also wieder eine ganze Funktion ist. Geben Sie damit ein alternatives Argument für (a).

Aufgabe 4. Seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Weiter sei $a \in \partial B_r(0)$ die einzige Nullstelle von g in der abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(0)} \subset U$ vom Radius $r > 0$, und es gelte $g'(a) \neq 0$ und $f(a) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a ,$$

wobei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f/g um 0 ist.

Hinweis: Schreiben Sie $g(z) = (z - a)h(z)$. Welche Eigenschaften hat die Funktion $h(z)$? Betrachten Sie dann die Potenzreihenentwicklung von $f(z)/h(z)$.

Abgabe: Dienstag 5.05.20
Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den
Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail
“Blatt 4, [Name], [Matrikelnr.]” angeben.