SS 2020

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$. Sei c ein Punkt in der oberen Halbebene, d.h. $c \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(c) > 0$. Setze

$$r = |c - i|, \quad s = |c + i|.$$

(Was bedeuten diese Längen geometrisch?) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f

(i) im Kreisring $A_{r,s}(c)$,

(ii) auf $\{z \in \mathbb{C} \colon \ |z - c| > s\}$.

Wie sehen diese Laurentreihen im Spezialfall $c = \mathrm{i}$ aus?

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die *drei* Laurententwicklungen von $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)(z-2)}$ in den entsprechenden (größtmöglichen) Kreisringen um den Nullpunkt.

Aufgabe 3. Wir betrachten eine offene (und nichtleere) Kreisscheibe D um den Ursprung $0 \in \mathbb{C}$ sowie einen offenen (und nichtleeren) Kreisring A um 0. Eine komplexwertige Funktion f auf D oder A heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), falls $f(z) = f(-z)$ (bzw. $f(z) = -f(-z)$) für alle z in D oder A.

(a) Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ mit Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ um den Ursprung. Zeigen Sie durch Betrachtung der Ableitungen in $z = 0$, daß f genau dann gerade (bzw. ungerade) ist, wenn die a_k verschwinden für alle ungeraden (bzw. geraden) $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Beweisen Sie die entsprechende Aussage für die Laurentreihe einer Funktion $f \in \mathcal{O}(A)$.

Aufgabe 4. * Es sei $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg, K eine offene Kreisscheibe um $\gamma(t_0)$ und $f \in \mathcal{O}(K)$. Definiere die Funktion $r\colon [t_0, t_1] \to [0, \infty]$ wie folgt: Falls f längs des Weges $\gamma|_{[t_0,t]}$ analytisch fortsetzbar ist, so bezeichne $r(t)$ den Konvergenzradius der Taylorreihe an der Stelle $\gamma(t)$ der durch analytische Fortsetzung erhaltenen Funktion; falls eine analytische Fortsetzung nicht existiert, setze $r(t) = 0$.

(a) Zeigen Sie, daß $r(t)$ entweder für jedes $t \in [t_0, t_1]$ oder für kein t unendlich ist.

(b) Bestimmen Sie den Radius der größten Kreisscheibe um $\gamma(t)$, die in K liegt, sowie den Radius der kleinsten Kreisscheibe um $\gamma(t)$, die K umfaßt.

(c) Verwenden Sie die Überlegungen aus (b) um zu zeigen, daß die Funktion r — im Falle, daß sie endlich ist — stetig ist.

NEU:

* Die gesternten Aufgaben werden nicht korrigiert oder bepunktet. In der Folgewoche erhalten Sie aber dennoch eine Lösungsskizze, so daß diese Aufgaben der Selbstkontrolle (oder dem reinen mathematischen Vergnügen) dienen.

Abgabe: Dienstag 19.05.20

Bis spätestens 18:00 Uhr per e-mail an den

Leiter Ihrer Übungsgruppe. Bitte als Betreff der e-mail

“Blatt 6, [Name], [Matrikelnr.]” angeben.