SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Definiere eine Abbildung $\tau\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ durch

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

(a) Zeigen Sie, daß τ eine $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung ist. Dies rechtfertigt die Bezeichnung **Torsions-*Tensor*** für τ, wie wir in der Vorlesung diskutieren werden.

(b) Der Zusammenhang ∇ heißt **symmetrisch**, wenn sein Torsions-Tensor identisch verschwindet. Zeigen Sie, daß ∇ genau dann symmetrisch ist, wenn seine Christoffel-Symbole bezüglich jedes lokalen Koordinatenrahmens $\partial_1, \ldots, \partial_n$ symmetrisch sind, d.h. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Aufgabe 2. Es sei $L\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ die aus der Elementaren Differentialgeometrie bekannte Lie-Ableitung $(X,Y) \mapsto L_X Y = [X,Y]$.

(a) Zeigen Sie, daß L *kein* Zusammenhang ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel von Vektorfeldern V, W auf dem $\mathbb{R}^2$ mit $V = W = \partial_1$ längs der x^1-Achse, aber $L_V(\partial_2) \neq L_W(\partial_2)$ längs der x^1-Achse.

Dies zeigt, daß die Lie-Ableitung nicht zu einer wohldefinierten Ableitung von Vektorfeldern längs Kurven einschränkt, wie es lineare Zusammenhänge tun.

Aufgabe 3. Es seien ∇^0 und ∇^1 zwei (lineare) Zusammenhänge auf einer Mannigfaltigkeit M. Die Abbildung $A\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, definiert durch $A(X,Y) = \nabla^1_X Y - \nabla^0_X Y$, heißt **Differenz-Tensor** von ∇^0 und ∇^1.

(a) Zeigen Sie, daß A in der Tat $C^\infty(M)$-bilinear ist.

(b) Zeigen Sie umgekehrt, daß für jede $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung $A\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ durch $\nabla^0 + A$ ein Zusammenhang definiert ist. Die Menge aller Zusammenhänge ist also beschrieben durch $\{\nabla^0 + A\colon A \text{ ist } C^\infty(M)\text{-bilinear}\}$.

(c) Zeigen Sie, daß ∇^0 und ∇^1 genau dann die gleichen Geodätischen definieren, wenn ihr Differenz-Tensor *antisymmetrisch* ist, d.h. $A(X,Y) = -A(Y,X)$.

(d) Verifizieren Sie, daß ∇^0 und ∇^1 genau dann den gleichen Torsions-Tensor besitzen, wenn ihr Differenz-Tensor *symmetrisch* ist, d.h. $A(X,Y) = A(Y,X)$.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei ∇ ein linearer Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) ∇ ist **metrisch**, im Sinne daß

$$X\big(g(Y,Z)\big) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

(ii) In jedem lokalen Koordinatenrahmen $\partial_1, \ldots, \partial_n$, und mit den durch $g_{ij} = (g(\partial_i, \partial_j)$ definierten metrischen Koeffizienten, genügen die Christoffel-Symbole der Gleichung

$$g_{ij,k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{li},$$

wobei $g_{ij,k}$ die Ableitung $\partial_k g_{ij}$ bezeichnet.

Betrachten Sie dazu die Ableitung $\partial_k\big(g(X^i\partial_i, Y^j\partial_j)\big)$.

(iii) Sind Y, Z Vektorfelder längs einer Kurve γ in M, so gilt

$$\frac{d}{dt} g(Y,Z) = g\Big(\frac{D}{dt}Y, Z\Big) + g\Big(Y, \frac{D}{dt}Z\Big).$$

(iv) Sind Y, Z parallele Vektorfelder längs γ, so ist $g(Y,Z)$ konstant.

(v) Parallelverschiebung $P_{t_0 t_1} \colon T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ ist eine Isometrie für jede Kurve $\gamma \colon I \to M$ und alle $t_0, t_1 \in I$.

Abgabe: Dienstag, 4.5.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs