SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. In der Vorlesung hatten wir die kovariante Ableitung $\nabla_X S$ einer C^∞-multilinearen Abbildung

$$S\colon \Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(mit k Faktoren $\Gamma(TM)$) definiert durch

$$(\nabla_X S)(Y_1, \ldots, Y_k) = X(S(Y_1, \ldots, Y_k)) - S(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_k) - \cdots - S(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_k).$$

In dieser Aufgabe wollen wir einen weiteren Beleg dafür liefern, daß dies eine sehr natürliche Definition ist.

(a) Verifizieren Sie zunächst, daß $\nabla_X S$ wieder $C^\infty(M)$-linear in jedem der k Argumente Y_i ist.

(b) Sei $p \in M$ gegeben, und $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X_p$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von T_pM, und $t \mapsto e_i(t)$ das Vektorfeld längs γ, das man durch Parallelverschiebung von e_i erhält. Setze

$$S_{i_1 \ldots i_k}(t) := S(e_{i_1}(t), \ldots, e_{i_k}(t)).$$

Zeigen Sie, daß

$$(\nabla_X S(p))_{i_1 \ldots i_k} = \frac{d}{dt}|_{t=0} S_{i_1 \ldots i_k}.$$

Mit anderen Worten, die Komponenten der kovarianten Ableitung $\nabla_X S$ bezüglich eines parallelen Rahmens sind einfach die gewöhnlichen Ableitungen der Komponenten von S.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für die in Aufgabe 1 definierte kovariante Ableitung und für jede Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt:

$$\nabla_X(fS) = X(f)S + f\nabla_X S.$$

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß der Krümmungstensor R vollständig durch die Schnittkrümmungen bestimmt ist. Allgemeiner: Sei

$$R\colon \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung, die den Symmetrien von Satz 4.3 der Vorlesung genügt, d.h.

(i) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$,

(ii) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$,

(iii) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$,

(iv) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$,

wobei, wie wir gesehen haben, (iv) eine Konsequenz von (i) bis (iii) ist. Setze

$$K(X,Y) = R(X,Y,Y,X);$$

dies ist also bis auf den Faktor $|X|^2|Y|^2 - (g(X,Y))^2$ die Gauß-Krümmung, wenn R der Riemannsche Krümmungstensor ist.

(a) Verifizieren Sie die Identität

$$\begin{aligned} 6R(X,Y,Z,W) \quad = \quad & K(X+W,Y+Z) - K(X+W,Y) - K(X+W,Z) - K(X,Y+Z) \\ & - K(W,Y+Z) + K(X,Z) + K(W,Y) - K(Y+W,X+Z) \\ & + K(Y+W,X) + K(Y+W,Z) + K(Y,X+Z) + K(W,X+Z) \\ & - K(Y,Z) - K(W,X). \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$R'(X,Y,Z,W) := g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)$$

den Symmetrien (i) bis (iv) genügt. Dies, zusammen mit der Konsequenz aus (a), daß dann auch R' durch das entsprechende K' bestimmt ist, verwenden wir im Beweis des Satzes von Schur über Raumformen. Zeigen Sie außerdem, daß aus der Parallelität von g auch die von R' folgt, also $\nabla R' = 0$.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß jede zusammenhängende, 3-dimensionale Einstein-Mannigfaltigkeit eine Raumform ist.

(b) Wie ändern sich Levi-Civita-Zusammenhang, Krümmungstensor und die Schnittkrümmungen, wenn man die Riemannsche Metrik g auf einer Mannigfaltigkeit durch λg, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, ersetzt? Was bedeutet das für die Schnittkrümmungen der n-Sphäre vom Radius R in $\mathbb{R}^{n+1}$?

Abgabe: Dienstag, 1.6.21
bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs