SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Bei der Diskussion von Flüssen hatten wir gesehen, daß sich Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung als Integralkurven eines Vektorfeldes interpretieren lassen. Analog wollen wir in dieser Aufgabe anhand eines einfachen Beispiels diskutieren, wie sich Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung als Integralmannigfaltigkeiten einer Distribution auffassen lassen. Die Integrabilität (d.h. Lösbarkeit) des Systems von Differentialgleichungen entspricht dabei genau der Integrabilität der Distribution.

Seien $g, h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen. Wir betrachten das System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(x,y,z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z)$$

und suchen für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ jeweils eine Lösung $z = f(x,y)$, wobei f eine C^2-Funktion sein soll, die der 'Anfangsbedingung' $f(a,b) = c$ genügt.

(a) Zeigen Sie, daß die Bedingung $g_y + hg_z = h_x + gh_z$, wobei die Indizes partielle Ableitungen bezeichnen, notwendig für die Existenz einer Lösung zu jeder gegebenen Anfangsbedingung ist.

(b) Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Vektorfelder

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial z} \text{ und } Y = \frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}.$$

Verifizieren Sie, daß f genau dann Lösung ist, wenn der Graph von f eine Integralmannigfaltigkeit der von X und Y aufgespannten Distribution $\mathcal{D}$ ist.

(c) Rechnen Sie nach, daß die Integrabilitätsbedingung aus (a) äquivalent zu $[X,Y] \in \mathcal{D}$ ist.

(d) Aus dem Satz von Frobenius folgt dann, daß die Bedingung in (a) auch hinreichend für die Existenz von Lösungen ist. Schreiben Sie die Lösung zu einer vorgegebenen Anfangsbedingung explizit mittels der Flüsse von X und Y.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß sich die Involutivität einer d-dimensionalen Distribution $\mathcal{D}$ auf einer Mannigfaltigkeit M lokal anhand einer beliebigen Basis verifizieren läßt. Sei dazu $X_1, \ldots, X_d \in \Gamma(TU)$ eine lokale Basis von Vektorfeldern in $\mathcal{D}$, d.h. $X_1(q), \ldots, X_d(q)$ ist Basis von $\mathcal{D}_q \subset T_qM$ für alle $q \in U \subset M$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{D}|_U$ genau dann involutiv ist, wenn $[X_i, X_j]_q \in \mathcal{D}_q$ für alle $q \in \mathcal{D}$.

b.w.

Aufgabe 3. Die folgenden beiden Überlegungen gehen in den Beweis des Satzes von Frobenius ein, wobei wir die Aussage in (a) aufgrund der lokalen Koordinatendarstellung im Beweis gar nicht in dieser Allgemeinheit zitieren müssen.

(a) Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\varphi \in C^\infty(M,N)$, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ und $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$. Zeigen Sie: Falls

$$T_p\varphi(X_{i,p}) = Y_{i,\varphi(p)} \quad \text{für } \ i = 1,2,$$

so gilt auch

$$T_p\varphi([X_1, X_2]_p) = [Y_1, Y_2]_{\varphi(p)}.$$

(b) Sei $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, mit $d \leq n$, eine differenzierbare Abbildung mit $\psi(0) = 0$, deren Jacobische J_ψ auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^d$ den vollen Rang d hat. Nach Vertauschen der Koordinaten im $\mathbb{R}^n$ können wir annehmen, daß

$$\det\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\Big) \neq 0$$

auf einer Umgebung von 0, d.h. die Abbildung

$$h : (x_1, \ldots, x_d) \longmapsto (\psi_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, \psi_d(x_1, \ldots, x_d))$$

ist lokal um 0 invertierbar, und

$$\psi \circ h^{-1}(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_d, \psi_{d+1} \circ h^{-1}, \ldots, \psi_n \circ h^{-1}).$$

Setze

$$k(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_d, y_{d+1} - \psi_{d+1} \circ h^{-1}(y_1, \ldots, y_d), \ldots, y_n - \psi_n \circ h^{-1}(y_1, \ldots, y_d)).$$

Zeigen Sie, daß k lokal um 0 invertierbar ist, und daß

$$k \circ \psi \circ h^{-1}(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

Aufgabe 4. Sei α eine 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit M. Dies bedeutet, daß α fasernweise eine lineare Abbildung $T_pM \to \mathbb{R}$ definiert, und in lokalen Koordinaten gilt $\alpha = a_j \,\mathrm{d}x^j$ (Summationskonvention!) mit differenzierbaren Funktionen $a_1, \ldots, a_n$ und $\mathrm{d}x^j(\partial/\partial x^i) = \delta_{ij}$. Die äußere Ableitung $\mathrm{d}\alpha$ von α ist die 2-Form, die lokal durch

$$\mathrm{d}(a_j \,\mathrm{d}x^j) = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

definiert ist, wobei $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j(X,Y) = \mathrm{d}x^i(X)\mathrm{d}x^j(Y) - \mathrm{d}x^j(X)\mathrm{d}x^i(Y)$. Zeigen Sie

$$\mathrm{d}\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]).$$

Hinweis: Zeigen Sie die $C^\infty(M)$-Linearität der rechten Seite, und verifizieren Sie die Identität dann für Koordinatenvektorfelder.

Abgabe: Dienstag, 8.6.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs