SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die 1-Form $\alpha = \mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{D} := \ker\alpha$ involutiv ist, und daß die Integralmannigfaltigkeiten von $\mathcal{D}$ Graphen von Funktionen $z = f(x,y)$ sind.

(b) Geben Sie eine Basis für die Tangentialebenen an einen solchen Graphen an.

(c) Bestimmen Sie die möglichen Funktionen f explizit.

Aufgabe 2. Sei $s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene C^3-Kurve mit $\gamma''(s_0) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, daß der Schmiegkreis an γ in $\gamma(s_0)$ der eindeutige Kreis ist, der γ in $\gamma(s_0)$ schneidet und dort die gleiche Tangente und die gleiche Krümmung wie γ hat.

(b) Sei $s \mapsto \beta(s)$ eine Bogenlängenparametrisierung des Schmiegkreises von γ in $\gamma(s_0)$, mit $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

  (i) γ hat Berührordnung 3 mit dem Schmiegkreis β.

  (ii) Die Ableitungen von β und γ stimmen in s_0 bis zur dritten Ordnung überein.

  (iii) Die Ableitung der ebenen Krümmung von γ verschwindet in s_0.

Bemerkung: Diese Überlegungen legen nahe, wie man auch für zwei beliebige Kurven die Berührordnung definieren kann. Ordnung 1 bedeutet dann gleiche Tangente, Ordnung 2 gleiche Krümmung, Ordnung 3 gleiche Ableitung der Krümmung.

Aufgabe 3. Seien f, g zwei reellwertige C^∞-Funktionen auf dem $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, daß die Bedingung

$$\frac{f(x,y)}{|(x,y)|^k} \text{ bleibt beschränkt für } (x,y) \to (0,0)$$

(für ein $k \in \mathbb{N}$) äquivalent ist zu der Aussage, daß f und alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung $k-1$ in $(x,y) = (0,0)$ verschwinden. Wir sagen dann, f verschwindet in $(0,0)$ zu k-ter Ordnung.

(b) Zeigen Sie, daß aus dem Verschwinden von f zu k-ter Ordnung und dem Verschwinden von g zu ℓ-ter Ordnung in $(0,0)$ folgt, daß das Produkt fg zu $(k+\ell)$-ter Ordnung verschwindet.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig bezüglich des Ursprungs ist, d.h. für jeden Punkt $x \in U$ liegt auch tx in U für alle $t \in [0,1]$. Sei $\alpha = \sum_{i=1}^n a_j \, \mathrm{d}x^j$ eine 1-Form auf U mit $\mathrm{d}\alpha = 0$, d.h.

$$\frac{\partial a_j}{\partial x^i} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \quad \text{für alle } i,j = 1,\ldots,n.$$

Rechnen Sie nach, daß die Funktion

$$f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n x^i a_i(tx) \, \mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion der 1-Form α ist, d.h. $\mathrm{d}f = \alpha$.

(b) Seien $a, b \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zwei C^2-Funktionen. Definiere

$$f(x,y) := -\int_0^1 \big(a(tx,ty,0)x + b(tx,ty,0)y \big) \, \mathrm{d}t.$$

(i) Berechnen Sie die die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} (in einem allgemeinen Punkt (x,y)).

(ii) Verifizieren Sie, daß gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= -a_x(0,0,0), \\ f_{xy}(0,0) &= -\frac{1}{2}\big(a_y(0,0,0) + b_x(0,0,0)\big), \\ f_{yy}(0,0) &= -b_y(0,0,0). \end{aligned}$$

(iii) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 5.9 der Vorlesung, indem Sie zeigen, daß aus der Bedingung $(\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha)_{(0,0,0)} = 0$ (in der Notation jenes Beweises) folgt, daß der Graph von f eine Fläche ist, die Berührordnung 2 mit $\xi = \ker \alpha$ im Punkt $(0,0,0)$ hat.

Abgabe: Dienstag, 15.6.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs