SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir die 1-Form

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} (x_j \, \mathrm{d}y_j - y_j \, \mathrm{d}x_j),$$

wobei $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ kartesische Koordinaten auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ sind.

(a) Zeigen Sie, daß $\alpha := \lambda|_{TS^{2n-1}}$ eine Kontaktform auf der $(2n-1)$-dimensionalen Sphäre S^{2n-1} ist. Berechnen Sie dazu die $2n$-Form

$$\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1} \wedge r \, \mathrm{d}r,$$

wobei r die Radialkoordinate ist, d.h. $r^2 = \sum_j (x_j^2 + y_j^2)$, und beachten Sie, daß man $T_pS^{2n-1} \subset T_p\mathbb{R}^{2n}$, für $p \in S^{2n-1}$, charakterisieren kann als den Kern von $\mathrm{d}r$.

(b) Geben Sie das Reeb-Vektorfeld R_α explizit an.

(c) Beschreiben Sie den **Reeb-Fluß**, d.h. den Fluß von R_α.

Aufgabe 2. Ein Diffeomorphismus $\phi\colon (M_1, \alpha_1) \to (M_2, \alpha_2)$ zweier Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 mit Kontaktformen α_1, α_2 heißt **strikter Kontaktomorphismus**, falls $\phi^*\alpha_2 = \alpha_1$.

(a) Zeigen Sie, daß für einen solchen strikten Kontaktomorphismus $\phi_* R_{\alpha_1} = R_{\alpha_2}$ gilt.

(b) Finden Sie einen strikten Kontaktomorphismus $(\mathbb{R}^3, \alpha_1) \to (\mathbb{R}^3, \alpha_2)$ für

$$\alpha_1 = \mathrm{d}z + x \, \mathrm{d}y, \quad \alpha_2 = \mathrm{d}z + (x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x).$$

(c) Skizzieren sie die Kontaktstrukturen $\ker \alpha_1$ und $\ker \alpha_2$, indem Sie die Kontaktebenen $\ker_p \alpha_i$ für einige Punkte p in der Ebene $\{z = 0\}$ zeichnen. Beachten Sie, daß beide Kontaktformen invariant unter Translation in z-Richtung sind.

Aufgabe 3. Auf $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ betrachten wir die Familie von 1-Formen

$$\alpha_t = x_1 \, \mathrm{d}y_1 - y_1 \, \mathrm{d}x_1 + (1+t)(x_2 \, \mathrm{d}y_2 - y_2 \, \mathrm{d}x_2)$$

mit $t \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) Verifizieren sie, daß α_t für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ eine Kontaktform auf S^3 definiert.

(b) Berechnen Sie das Reeb-Vektorfeld R_t von α_t, und drücken Sie dieses mittels Polarkoordinaten $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ aus. Schreiben Sie auch die 1-Form α_t in diesen Koordinaten.

(c) Verifizieren Sie, daß Kreise $\{r_1 = 0,\ r_2 = 1\}$ und $\{r_1 = 1,\ r_2 = 0\}$ in S^3 Flußlinien von R_t für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ sind.

(d) Zeigen Sie, daß durch die Gleichungen $r_1 = r$, $r_2 = \sqrt{1-r^2}$ für jedes r im Intervall $(0,1)$ ein 2-Torus in S^3 definiert ist.

(e) Zeigen Sie, daß der Fluß von R_t tangential an die 2-Tori aus (d) ist.

(f) Zeigen Sie durch Betrachtung des Flusses von R_t auf diesen 2-Tori, daß es für $s \neq t$ i.a. keinen strikten Kontaktomorphismus $(S^3, \alpha_s) \to (S^3, \alpha_t)$ geben kann.

Aufgabe 4. Zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit B betrachten wir den Raum C^+B der *koorientierten* Kontaktelemente, d.h. der Paare (b, V) bestehend aus einem Punkt $b \in B$ und einer Hyperebene $V \subset T_bB$ mit einer gewählten Koorientierung. Da man aus genau zwei Koorientierungen auswählen kann, hat man eine natürliche $2:1$ Abbildung $C^+B \to CB$, bei der man einfach die Koorientierung vergißt.

Wähle eine Riemannsche Metrik g auf B. Dann kann man C^+B mit dem **Einheitstangentialbündel**

$$STB := \big\{v \in TB\colon\ |v| = 1\big\}$$

identifizieren, indem wir zu $V \subset T_bB$ den Einheitsvektor $v \in T_bB$ positiv orthogonal zu V (bzgl. der Koorientierung von V und des Skalarproduktes g_b) assoziieren.

(a) Zeigen Sie, daß das Differential der Abbildung $TB \to \mathbb{R}$, $v \mapsto |v|^2$, entlang STB surjektiv ist, und folgern Sie, daß STB eine Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Kurve $t \mapsto \gamma(t) = v + tv$.

Schreibe $\pi\colon\ STB \to B$ für die Fußpunktprojektion. Auf der Mannigfaltigkeit STB definieren wir ein Hyperebenenfeld $\xi \subset T(STB)$ durch die Bedingung $T\pi(\xi_v) = V \subset TB$, wobei V die durch v definierte koorientierte Hyperebene ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\xi = \ker \alpha|_{STB}$, wobei α die durch $\alpha_v := \pi^*\big(g_{\pi(v)}(v, .)\big)$ definierte 1-Form auf TB ist.

(c) Schreiben Sie α in lokalen Koordinaten

$$(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^n) = \big(a^1\partial_{x^1} + \cdots + a^n\partial_{x^n}\big)_{(x^1,\ldots,x^n)}$$

auf TB und verifizieren Sie die Kontaktbedingung $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1} \neq 0$.

Hinweis: Rechnen Sie in Normalkoordinaten an einem Punkt $p \in B$, und wie in Aufgabe 1.

Abgabe: Dienstag, 22.6.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs