SS 2021 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe wollen wir die heuristisch einleuchtende Aussage beweisen, daß ein Vektorfeld X auf einer Kontaktmannigfaltigkeit $(M, \xi = \ker \alpha)$ genau dann ein Kontaktvektorfeld für ξ ist, d.h. der Fluß von X erhält ξ, wenn $L_X\alpha = \mu\alpha$ gilt mit einer differenzierbaren Funktion $\mu\colon M \to \mathbb{R}$. Dies hatten wir in der Vorlesung verwendet.

(a) Zunächst wollen wir uns überlegen, daß die Bedingung $L_X\alpha = \mu\alpha$ für eine geeignete Funktion μ unabhängig von der Wahl der Kontaktform α für ξ ist, also wirklich eine Aussage nur über ξ darstellt. Zeigen Sie dazu, daß aus $L_X\alpha = \mu\alpha$ folgt:

$$L_X(\lambda\alpha) = \bigl(X(\lambda) + \lambda\mu\bigr)\alpha.$$

(b) Sei ψ_t der Fluß eines beliebigen Vektorfeldes Y auf M, und β eine k-Form. Zeigen Sie (direkt und ohne Verwendung von Lemma 6.6 der Vorlesung), daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}(\psi_t^*\beta) = \psi_{t_0}^*(L_Y\beta).$$

Hierzu braucht man keine lokale Koordinatendarstellung.

(c) Sei X ein Kontaktvektorfeld und ϕ_t der Fluß von X. Dann gilt also $\phi_t^*\alpha = \lambda_t\alpha$ mit $\lambda_t\colon M \to \mathbb{R}^+$. (Wir nehmen vereinfachend an, daß der Fluß global definiert ist, aber alle Aussagen sind auch im allgemeinen Fall wahr, wenn man sie korrekt interpretiert.) Folgern Sie, daß

$$L_X\alpha = \dot{\lambda}_0\alpha \quad \text{mit} \quad \dot{\lambda}_0(p) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(\lambda_t(p)\bigr)\big|_{t=0}, \quad p \in M.$$

(d) Umgekehrt gelte $L_X\alpha = \mu\alpha$. Zeigen Sie durch Betrachten von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\alpha$, daß

$$\phi_t^*\alpha = \lambda_t\alpha \quad \text{mit} \quad \lambda_t = \exp\Bigl(\int_0^t (\mu \circ \phi_s)\,\mathrm{d}s.\Bigr)$$

Aufgabe 2. (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(2u - t)\dot{u} = u - t, \quad u(0) = 1$$

für $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t)$, mit elementaren Methoden.

(b) Verifizieren Sie, daß $m(s) := y'(s)/x'(s)$ (mit Notation wie im Beispiel von Abschnitt 6.6) der Gleichung $m(s) = \dot{u}(-2\sin s)$ genügt, und daß $m' = 2m^2 - 2m + 1$ gilt.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $t^2\dot{u} + tu = 1$, $u(1) = 2$, mit der Methode der Kontaktelemente aus Abschnitt 6.6.

b.w.

Aufgabe 3. Auf der Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$ betrachten wir das zeitabhängige Vektorfeld $X_t(x) = t\partial_x$.

(a) Berechnen Sie die durch X_t bestimmte Isotopie $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von M, d.h. die Isotopie mit $\dot{\phi}_t = X_t \circ \phi_t$.

(b) Zeigen Sie, daß ϕ_t kein Fluß im 'klassischen' Sinn ist, d.h. im allgemeinen gilt *nicht* $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$.

(c) Auf $\mathbb{R} \times M$ mit Koordinaten (s, x) betrachten wir jetzt das Vektorfeld $\widetilde{X}_{(s,x)} = \partial_s + s\partial_x$. Berechnen Sie den Fluß Φ_t von $\widetilde{X}$ auf $M \times \mathbb{R}$.

(d) Verifizieren Sie die Identität

$$\Phi_t(x, s) = \big(\phi_{s+t} \circ \phi_s^{-1}(x), s + t\big).$$

Was bedeutet das geometrisch, und warum ist das heuristisch zu erwarten?

(e) Zeigen Sie, daß die Identität in (d) verträglich ist mit der Flußgleichung $\Phi_t \circ \Phi_u = \Phi_{t+u}$.

Aufgabe 4. Es seien (r, φ, z) Zylinderkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^3$, d.h. (r, φ) sind Polarkoordinaten in der (x, y)-Ebene, und z ist die gewöhnliche kartesische Koordinate.

(a) Zeigen Sie, daß die Standardkontaktform $\alpha = \mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ auf dem $\mathbb{R}^3$ (vergl. Übungsblatt 9, Aufgabe 2) in Zylinderkoordinaten die Gestalt

$$\alpha = \mathrm{d}z + r^2\,\mathrm{d}\varphi$$

hat.

(b) Zeigen Sie, daß durch

$$\beta = \cos r\,\mathrm{d}z + r\sin r\,\mathrm{d}\varphi$$

eine glatte 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert ist ($\mathrm{d}\varphi$ ist in $r = 0$ nicht definiert!), und daß β eine Kontaktform ist.

(c) Finden Sie eine eingebettete Scheibe D^2 im $\mathbb{R}^3$ mit $TD^2|_{\partial D^2} = \ker\beta|_{\partial D^2}$.

Bemerkung: Eine Scheibe wie in (c) nennt man in der 3-dimensionalen Kontakttopologie eine 'überdrehte' Scheibe. Es ist ein tiefer Satz, daß eine solche Scheibe für $\ker\alpha$ nicht existieren kann. Dies zeigt, daß die Kontaktstruktur $\ker\beta$ auf dem $\mathbb{R}^3$ nicht diffeomorph zur Standardkontaktstruktur ist.

Abgabe: Dienstag, 29.6.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs