SS 2021

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Kontaktmannigfaltigkeit $(M, \xi = \ker\alpha)$.

(a) Das Reeb-Vektorfeld R_α ist ein Kontaktvektorfeld für ξ. Der Fluß von R_α erhält sogar die Kontaktform α.

(b) Das Reeb-Vektorfeld ist genau das Kontaktvektorfeld für $\xi = \ker\alpha$, das (bzgl. α) der Hamiltonfunktion $H \equiv 1$ entspricht.

(c) Ist $f\colon M \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion, so ist das Reeb-Vektorfeld der Kontaktform $f\alpha$ das Kontaktvektorfeld, das (bzgl. α) der Funktion $H = 1/f$ entspricht.

(c) Ist X Kontaktvektorfeld für ξ mit $H_X := \alpha(X) > 0$, so gibt es eine Kontaktform für ξ, für die X das Reeb-Vektorfeld ist.

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie das Reeb-Vektorfeld der Kontaktform auf dem $\mathbb{R}^3$, die in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}z + r^2\,\mathrm{d}\varphi}{(1 + r^2 + z^2)^2}.$$

(Aufgabe 1 könnte hier hilfreich sein.)

(b) Finden Sie eine periodische Bahn dieses Reeb-Vektorfeldes, und zeigen Sie damit, daß es keinen Diffeomorphismus ϕ des $\mathbb{R}^3$ mit $\phi^*\alpha = \mathrm{d}z + r^2\,\mathrm{d}\varphi$ gibt.

Aufgabe 3. Es sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2n$. Eine Basis $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ für V mit

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

nennen wir **symplektische Basis**. Zeigen Sie:

(i) Ist $U \subset V$ ein symplektischer Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k$ eine Basis für U ist.

(ii) Ist $U \subset V$ ein isotroper Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, \dots, e_k$ Basis für U ist.

(iii) Ist $U \subset V$ ein koisotroper Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_k$ Basis für U ist.

(iv) Ist $U \subset V$ ein Lagrange-Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, \dots, e_n$ Basis für U ist.

(v) Ist $U \subset V$ ein Unterraum und J eine ω-kompatible komplexe Struktur auf V, so ist $J(U)$ ein zu $U^\perp$ komplementärer Unterraum von V.

Aufgabe 4. Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n, \mathrm{d}y_1, \dots, \mathrm{d}y_n$ die duale Basis zur Standardbasis, d.h. $\mathrm{d}x_i(\partial_{x_j}) = \delta_{ij}$, $\mathrm{d}x_i(\partial_{y_j}) = 0$ etc. Mit $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ sei das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ (sic!) bezeichnet.

Die gewöhnliche symplektische Form Ω auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ ist dann gegeben durch

$$\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \cdots + \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n.$$

Man schreibe Vektoren in $\mathbb{R}^{2n}$ in der Form $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}' \rangle.$$

(b) Sei $\mathrm{Sp}^+(2n)$ die Gruppe der positiv konformen symplektischen $(2n \times 2n)$-Matrizen, d.h. $\mathrm{Sp}^+(2n)$ besteht aus den reellen $(2n \times 2n)$-Matrizen, für die ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ existiert, so daß

$$\Omega\left(S\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \Omega\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Schreibe eine reelle $(2n \times 2n)$-Matrix S in Blockform

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit reellen $(n \times n)$-Matrizen A, B, C, D. Zeigen Sie, daß S genau dann in $\mathrm{Sp}(2n)^+$ liegt, wenn

$$\begin{aligned} A^t C &= C^t A \\ B^t D &= D^t B \\ A^t D - C^t B &= \lambda \cdot I_n \end{aligned}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Hier bezeichnet I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

Abgabe: Dienstag, 6.7.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs