Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Es seien (M_1, ω_1) und (M_2, ω_2) zwei symplektische Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n$. Mit π_i sei die Projektion der Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ auf M_i bezeichnet, $i = 1, 2$.

(a) Zeigen Sie, daß $\omega_\pm := \pi_1^*\omega_1 \pm \pi_2^*\omega_2$ symplektische Formen auf $M_1 \times M_2$ sind. Beachte, daß ω_+ und ω_- für ungerades n verschiedene Orientierungen von $M_1 \times M_2$ definieren.

(b) Für einen Diffeomorphismus $\varphi\colon\ M_1 \to M_2$ ist der Graph

$$\Gamma_\varphi := \big\{(p, \varphi(p))\colon\ p \in M_1\big\} \subset M_1 \times M_2$$

eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$. Zeigen Sie, daß φ ein Symplektomorphismus genau dann ist, wenn Γ_φ eine Lagrange-Untermannigfaltigkeit der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M_1 \times\ M_2, \omega_-)$ ist.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe wollen wir eine Struktur diskutieren, die wesentlich davon geprägt ist, daß wir bei der Definition einer symplektischen Form ω verlangen, daß ω geschlossen ist.

Sei also (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Für $f \in C^\infty(M)$ hatten wir das Hamiltonsche Vektorfeld X_f definiert durch $\mathrm{d}f = i_{X_f}\omega$.

Die **Poisson-Klammer** von $f, g \in C^\infty(M)$ ist

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g).$$

(i) Verifizieren Sie die Identitäten $\{f, g\} = X_g(f) = -X_f(g)$.

(ii) Zeigen Sie mittels der Cartan-Formel $L_X = \mathrm{d} \circ i_X + i_X \circ \mathrm{d}$ und der Formel aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 7, daß für eine 1-Form α gilt: $\alpha([X, Y]) = L_X \circ i_Y \alpha - i_Y \circ L_X \alpha$. In der Tat gilt die Formel

$$i_{[X,Y]} = L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X =: [L_X, i_Y]$$

für beliebige k-Formen, da beide Seiten das gleiche Verhalten bezüglich des Dachprodukts haben.

(iii) Zeigen sie, daß $X_{\{f,g\}} = [X_g, X_f]$. Beobachten Sie, wie hier die Bedingung $\mathrm{d}\omega = 0$ eingeht.

(iv) Benutzen Sie (i) und (iii), um die Jacobi-Identität

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f,\},g\}=0$$

für die Poisson-Klammer herzuleiten.

Aufgabe 3. (a) Im $\mathbb{R}^4$ mit kartesischen Koordinaten (x_1, y_1, x_2, y_2) und der gewöhnlichen symplektischen Form $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}y_2$ betrachten wir die Teilmenge $M = f^{-1}(1)$, wobei $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 - y_2^2$.

(i) Überprüfen Sie, daß M eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, und skizzieren Sie M geeignet (z.B. in der Ebene, wobei eine Achse den (x_1, y_1, x_2)-Unterraum symbolisiert).

(ii) Zeigen Sie, daß M eine Hyperebene vom Kontakttyp in $(\mathbb{R}^4, \omega)$ ist. Finden Sie dazu ein auf ganz $\mathbb{R}^4$ definiertes Liouville-Vektorfeld für ω transversal zu M.

(b) Sei $(N, \xi = \ker \alpha)$ eine Kontaktmannigfaltigkeit mit einer durch die Kontaktform α koorientierten Kontaktstruktur ξ. Zeigen Sie, daß es zu jeder anderen Kontaktform β für ξ (als koorientierte Kontaktstruktur) eine Einbettung φ von N in die Symplektisierung $(\mathbb{R} \times N, \mathrm{d}(\mathrm{e}^t\alpha))$ gibt, so daß $\varphi^*(\mathrm{e}^t\alpha) = \beta$. Folgern Sie, daß die Symplektisierung bis auf Symplektomorphismus nur von ξ abhängt.

Aufgabe 4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, die sternförmig bezüglich des Ursprungs ist. Wir wollen hier das Poincaré-Lemma für 2-Formen beweisen; für 1-Formen haben wir das schon auf Übungsblatt 8 behandelt.

Es sei $\omega = \sum_{i<j} f_{ij}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ eine 2-Form auf U.

(i) Zeigen Sie, daß ω genau dann geschlossen ist, wenn

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} = 0$$

für alle $i < j < k$ gilt.

(ii) Verifizieren Sie, daß in diesem Fall durch

$$\beta := \sum_{i<j} \Big(\int_0^1 t f_{ij}(tx)\, \mathrm{d}t \Big) \cdot (x_i\, \mathrm{d}x_j - x_j\, \mathrm{d}x_i)$$

eine 1-Form auf U definiert ist mit $\mathrm{d}\beta = \omega$, und mit $\beta_0 = 0$, falls $\omega_0 = 0$.

Wo geht hier die Sternförmigkeit von U ein?

Abgabe: Dienstag, 13.7.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs