SS 2021 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

# Einführung in die Riemannsche, Symplektische und Kontaktgeometrie

Übungsblatt 13

**Aufgabe 1.** (a) Zeigen Sie, daß das Integral $\int_a^b L(t,\mathbf{q},\mathbf{v})\,\mathrm{d}t$ über eine Lagrange-Funktion $L \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ kritisch ist für $\mathbf{q}=\alpha(t)$, $\mathbf{v}=\dot\alpha(t)$ (mit festen Endpunkten von $\alpha$) genau dann, wenn das System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial v_i}(t,\alpha(t),\dot\alpha(t)\Big)-\frac{\partial L}{\partial q_i}(t,\alpha(t),\dot\alpha(t))=0,\quad i=1,\ldots,n$$

von Euler–Lagrange-Gleichungen erfüllt ist (Bemerkung (2), Seite 160 im Skript).

(b) Beweisen Sie die erste Variationsformel für das Bogenlängenfunktional (Satz 8.5).

**Aufgabe 2.** Es sei $(W,\omega)$ eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, und $M\subset W$ eine Hyperfläche vom Kontakttyp, d.h. es existiere ein Liouville-Vektorfeld $Y$ für $\omega$, definiert in einer Umgebung von $M$ in $W$, das nirgends tangential an die Untermannigfaltigkeit $M$ der Kodimension 1 ist. Wie wir in der Vorlesung gesehen hatten, ist die 1-Form $\alpha := i_Y\omega|_{TM}$ dann eine Kontaktform auf $M$.

Sei nun weiter $H\colon W\to\mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so daß $H^{-1}(0)=M$ und $\mathrm{d}H|_M\neq 0$, d.h. $\mathrm{d}_pH\colon T_pW\to\mathbb{R}$ ist für kein $p\in M$ die Nullabbildung; anders formuliert, der Gradient von $H$ verschwindet nicht längs $M$. Zeigen Sie:

(a) Die 2-Form $\sigma$ auf $M$, die man durch Einschränkung von $\omega$ auf Tangentialvektoren von $M$ erhält, stimmt mit $\mathrm{d}\alpha$ überein.

(b) Der Kern von $\sigma$ in $p\in M$, d.h.

$$\ker\,\sigma_p := \big\{X\in T_pM\colon\ \sigma_p(X,Z)=0 \text{ für alle } Z\in T_pM\big\},$$

ist 1-dimensional, und wird sowohl von $R_\alpha$ als auch vom Hamiltonschen Vektorfeld $X_H$ aufgespannt.

(c) Folgern Sie, daß der Reeb-Fluß auf $M$ bis auf Reparametrisierung der Hamiltonsche Fluß ist.

In den Aufgaben 3 und 4 sei $(B,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 gesehen, können wir dann vom Einheitstangentialbündel $STB$ sprechen. Definiere $\Psi\colon TB\to T^*B$ durch $\Psi(X)=g_b(X,\,.\,)|_{T_bB}$ für $X\in T_bB$. Dann ist $\Psi$ ein Diffeomorphismus (vergl. Aufgabe 4 (b) unten) und $\Psi_b:=\Psi|_{T_bB}\colon T_bB\to T_b^*B$ ein linearer Isomorphismus.

b.w.

Die duale Bündelmetrik auf $T^*B$ ist definiert durch $g_b^*(u_1, u_2) := g_b(\Psi_b^{-1}(u_1), \Psi_b^{-1}(u_2))$ für $u_1, u_2 \in T_b^*B$. Dann ist auch das Einheitskotangentialbündel $ST^*B$ erklärt, und $\Psi$ bildet $STB$ diffeomorph auf $ST^*B$ ab.

**Aufgabe 3.** Es seien $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ lokale Koordinaten auf $B$, und $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ die entsprechenden dualen Koordinaten im Kotangentialbündel, d.h.

$$(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = \Big(\sum_{j=1}^n p_j \, \mathrm{d}q^j\Big)_{(q^1, \dots, q^n)}.$$

Wie wir gesehen hatten, ist die in lokalen Koordinaten durch $\mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q}$ beschriebene 1-Form $\lambda$ tatsächlich kanonisch und global auf $T^*B$ definiert, und $\omega := \mathrm{d}\lambda$ ist eine symplektische Form auf $T^*B$.

(a) Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $i_Y\omega = \lambda$ ein Liouville-Vektorfeld auf $T^*B$ definiert ist.

(b) Verifizieren Sie, daß dieses Vektorfeld in lokalen Koordinaten durch $\mathbf{p}\,\partial_{\mathbf{p}}$ beschrieben ist, also das radiale Vektorfeld in Fasernrichtung von $T^*B$ ist.

(c) Folgern Sie, daß die Integralkurve $u$ von $Y$ durch den Punkt $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ beschrieben wird durch $u(t) = (\mathbf{q}_0, \mathrm{e}^t\mathbf{p}_0)$.

(d) Berechnen Sie $g_{b_0}^*(u(t), u(t))$, und benutzen Sie dies, um zu zeigen, daß $Y$ transversal zu $ST^*B$ ist. Nach Satz 8.7 der Vorlesung bedeutet dies, daß die Einschränkung von $\lambda$ auf $ST^*B$ eine Kontaktform ist.

(e) Überlegen Sie sich, daß die so definierte Kontaktstruktur auf $ST^*B$ unter dem Diffeomorphismus $\Psi\colon STB \to ST^*B$ diffeomorph zu der auf Übungsblatt 9 definierten Kontaktstruktur auf $STB$ ist.

**Aufgabe 4.** (a) Seien zunächst $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ beliebige lokale Koordinaten um $b \in B$. Schreibe $X \in T_bB$ als $X = v^i\partial_{q^i}$. Rechnen Sie nach, daß

$$\Psi_b(X)(\partial_{q^j}) = g_{ij}(\mathbf{q})v^i.$$

(b) Folgern Sie, daß bzgl. der Basen $\partial_{q^1}, \dots, \partial_{q^n}$ und $\mathrm{d}q^1, \dots, \mathrm{d}q^n$ von $T_bB$ bzw. $T_b^*B$ der Isomorphismus $\Psi_b$ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = (g_{ij}(\mathbf{q})) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$

d.h. $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = (\mathbf{q}, (g_{ij}(\mathbf{q}))\mathbf{v})$.

(d) Seien nun $\mathbf{q}$ Normalkoordinaten um $b = \mathbf{0}$. Verifizieren Sie, daß dann $\Psi_b(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{v})$.

(e) Zeigen Sie weiter, durch Betrachten einer Kurve $t \mapsto (\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t))$ mit $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$, mittels der Gleichung aus (b) und den Eigenschaften von Normalkoordinaten, daß $T_{(\mathbf{0},\mathbf{v})}\Psi(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{v}}) = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{v}})$.

Abgabe: Dienstag, 20.7.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs