SS 2022

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Dr. Rima Chatterjee

Geometrische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (a) Der Torus T^2 kann als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} x &= -\sin\phi(R + r\cos\theta), \\ y &= \cos\phi(R + r\cos\theta), \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

wobei $r < R$ reelle Konstanten sind, und $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$. Skizzieren Sie diesen Torus und kennzeichnen Sie die Parameter ϕ, θ, r, R in Ihrer Skizze. Schreiben Sie die obige Parametrisierung in der Form (Rotationsmatrix) · (parametrisierte Kreislinie).

(b) Seien p, q teilerfremde ganze Zahlen. Die Menge

$$T(p,q) = \{(x,y,z) \in T^2 : \, p\phi = q\theta\}$$

heißt (p,q)-**Torusknoten**. Zeigen Sie:

(i) $T(n,1)$ und $T(1,n)$ sind triviale Knoten für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $T(p,q) = T(q,p)$.

(iii) $T(p,q) = T(-p,-q) = -T(p,q)$, d.h. Torusknoten sind invertierbar. (Hier sei $T(p,q)$ mit einer Orientierung versehen; $-T(p,q)$ bezeichnet dann den Knoten mit umgekehrter Orientierung.)

(iv) $T(-p,q)$ ist das Spiegelbild von $T(p,q)$.

(c) Identifizieren Sie den Kleeblattknoten als Torusknoten.

Aufgabe 2. Ziel dieser Aufgabe ist es, den folgenden Satz zu beweisen: *Falls eine orientierte Verschlingung L eine ungerade (bzw. gerade) Anzahl von Komponenten hat, so enthält das Jones-Polynom $V(L)$ nur Terme der Form q^k (bzw. $q^{k+1/2}$) mit $k \in \mathbb{Z}$.*

(i) Die Aussage gilt für die triviale Verschlingung.

(ii) Sei ein Kreuzungspunkt des Diagrammes von L ausgewählt, und seien L_+, L_-, L_0 die entsprechenden in der Vorlesung definierten Diagramme. Es bezeichne m_+, m_-, m_0 die Anzahl der Komponenten der durch diese Diagramme repräsentierten Verschlingungen. Dann gilt:

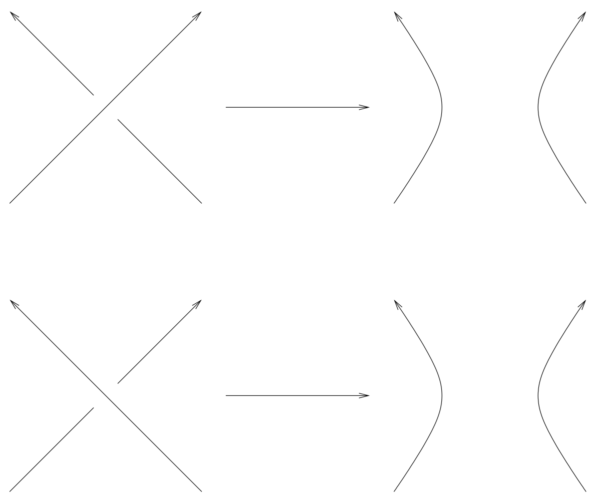
(a) m_+ und m_- haben die gleiche Parität (d.h. beide sind gerade oder beide ungerade).

(b) m_+ und m_0 haben unterschiedliche Parität.

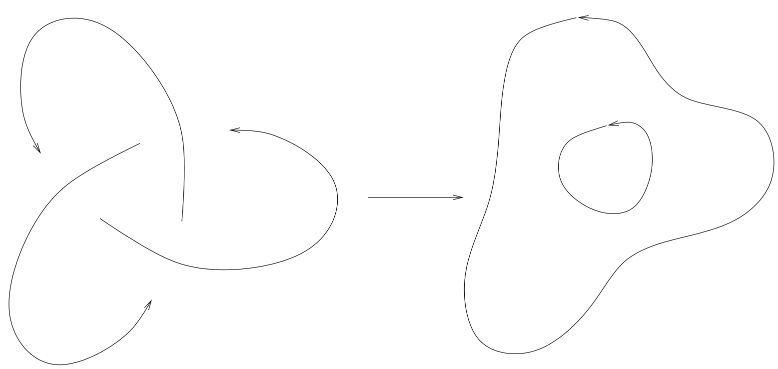
(iii) Falls der Satz für zwei der drei Polynome $V(L_+), V(L_-), V(L_0)$ gilt, dann auch für das dritte.

(iv) Folgern Sie aus (i)–(iii) den Satz in seiner allgemeinen Form.

Aufgabe 3. Betrachte ein orientiertes Knotendiagramm. Entferne alle Kreuzungspunkte nach folgender Regel:



Man erhält dann ein Diagramm, das nur noch aus orientierten Kreisen besteht. Jeder dieser Kreise berandet eine Scheibe. Falls die Kreise ineinander geschachtelt liegen (wie im Beispiel unten), so hebe man die Scheiben so an, daß die weiter innen liegende jeweils auf ein höheres Niveau zu liegen kommt.



Erklären Sie, wie man durch geeignetes Verbinden dieser Scheiben mit verdrehten Bändern eine **orientierte** (d.h. hier: zweiseitige), eingebettete (d.h. hier: selbstschnittfreie) Fläche im $\mathbb{R}^3$ erhalten kann, die den Knoten als Rand hat. Man nennt dies eine **Seifert-Fläche** des Knotens

Aufgabe 4. Welche Verschlingungen erhält man durch Abschluß der Zöpfe $b_1^{-1}b_2, (b_1^{-1}b_2)^2$ bzw. $(b_1^{-1}b_2)^3 \in \mathcal{B}_3$?

Abgabe: Mittwoch 27.4.22

bis spätestens 17:00 Uhr im Raum 206/7 des MI