Symplektische Topologie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Das Vektorfeld auf dem Phasenraum, dessen Flußlinien die Lösungen der Hamiltonschen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

sind, ist gegeben durch

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\,\partial_{\mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\,\partial_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}\,\partial_{q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,\partial_{p_i}\Big).$$

(a) Begründen Sie, warum das **Hamiltonsche Vektorfeld** X_H durch die Gleichung

$$\mathrm{d}H = \omega(X_H, \,.\,)$$

eindeutig bestimmt ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion H eine Invariante des Hamiltonschen Flusses ist (Energieerhaltungssatz).

Aufgabe 2. Es sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2n$. Eine Basis $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ für V mit

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

nennen wir **symplektische Basis**. Zeigen Sie:

(i) Ist $U \subset V$ ein symplektischer Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k$ eine Basis für U ist.

(ii) Ist $U \subset V$ ein isotroper Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, \ldots, e_k$ Basis für U ist.

(iii) Ist $U \subset V$ ein koisotroper Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_k$ Basis für U ist.

(iv) Ist $U \subset V$ ein Lagrange-Unterraum, so gibt es eine symplektische Basis für V derart, daß $e_1, \ldots, e_n$ Basis für U ist.

(v) Ist $U \subset V$ ein Unterraum und J eine ω-kompatible komplexe Struktur auf V, so ist $J(U)$ ein zu $U^\perp$ komplementärer Unterraum von V.

Aufgabe 3. Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n, \mathrm{d}y_1, \dots, \mathrm{d}y_n$ die duale Basis zur Standardbasis, d.h. $\mathrm{d}x_i(\partial_{x_j}) = \delta_{ij}$, $\mathrm{d}x_i(\partial_{y_j}) = 0$ etc. Mit $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ sei das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ (sic!) bezeichnet.

Die gewöhnliche symplektische Form Ω auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$ ist dann gegeben durch

$$\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \dots + \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}y_n.$$

Man schreibe Vektoren in $\mathbb{R}^{2n}$ in der Form $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}' \rangle.$$

(b) Sei $\mathrm{Sp}^+(2n)$ die Gruppe der positiv konformen symplektischen $(2n \times 2n)$-Matrizen, d.h. $\mathrm{Sp}^+(2n)$ besteht aus den reellen $(2n \times 2n)$-Matrizen, für die ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ existiert, so daß

$$\Omega\left(S\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \Omega\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}\right) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Schreibe eine reelle $(2n \times 2n)$-Matrix S in Blockform

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit reellen $(n \times n)$-Matrizen A, B, C, D. Zeigen Sie, daß S genau dann in $\mathrm{Sp}(2n)^+$ liegt, wenn

$$\begin{aligned} A^t C &= C^t A \\ B^t D &= D^t B \\ A^t D - C^t B &= \lambda \cdot I_n \end{aligned}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Hier bezeichnet I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

Aufgabe 4. Sei L ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Auf $L \oplus L^*$ definieren wir eine Bilinearform ω_0 durch

$$\omega_0(u \oplus \alpha, v \oplus \beta) := \beta(u) - \alpha(v).$$

(a) Verifizieren Sie, daß ω_0 eine symplektische Form auf $L \oplus L^*$ ist.

Sei nun L ein Lagrange-Unterraum eines symplektischen Vektorraumes (V, ω). Zeigen Sie:

(b) $(L \oplus L^*, \omega_0)$ ist **symplektomorph** zu (V, ω), d.h. es gibt einen Isomorphismus von Vektorräumen $\varphi\colon\ L \oplus L^* \to V$ mit $\varphi^*\omega = \omega_0$.

(c) Ist J eine ω-kompatible komplexe Struktur auf V, dann ist JL ebenfalls Lagrange, und $JL = L^\perp$, wobei $\perp$ das orthogonale Komplement bezüglich des Skalarproduktes g_J bezeichnet.

Abgabe: Dienstag 11.4.23 in der Übung.