Symplektische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Liouville-Form λ auf dem Kotangentialbündel T^*B einer Mannigfaltigkeit B eindeutig charakterisiert werden kann durch die Eigenschaft, daß

$$\alpha = \alpha^*\lambda \quad \text{für jede 1-Form } \alpha \text{ auf } B.$$

Hier bezeichnet α^* den Rücktransport unter α, aufgefaßt als Abbildung $\alpha\colon B \to T^*B$.

Aufgabe 2. Sei $f\colon B_1 \to B_2$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten B_1, B_2. Dieser hebt wie folgt zu einem Diffeomorphismus $\tilde{f}\colon T^*B_1 \to T^*B_2$ an. Schreibe dazu $\pi_i\colon T^*B_i \to B_i$, $i = 1, 2$, für die Bündelprojektionen. Für $q_1 \in B_1$ setzen wir $q_2 := f(q_1) \in B_2$. Für $x_1 \in T^*B_1$ mit $\pi_1(x_1) = q_1$, d.h. $x_1 \in T^*_{q_1}B_1$, definieren wir

$$x_2 = \tilde{f}(x_1) := x_1 \circ T_{q_2}f^{-1} \in T^*_{q_2}B_2.$$

Zeigen Sie, daß $\tilde{f}^*\lambda_2 = \lambda_1$ gilt. Insbesondere ist $\tilde{f}$ ein Symplektomorphismus $T^*B_1 \to T^*B_2$ bezüglich der kanonischen symplektischen Formen.

Aufgabe 3. Es sei α eine k-Form auf einer Mannigfaltigkeit M, und X ein Vektorfeld auf M. Schreibe ϕ_t für den (lokalen) Fluß von X. Die Lie-Ableitung von α in Richtung von X ist die durch

$$L_X\alpha := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\phi_t^*\alpha$$

definierte k-Form.

Beweisen Sie die **Cartan-Formel**

$$L_X\alpha = i_X(\mathrm{d}\alpha) + \mathrm{d}(i_X\alpha),$$

indem Sie folgende Schritte verifizieren:

(i) Die Formel gilt für 0-Formen, d.h. differenzierbare Funktionen auf M.

(ii) Beide Operatoren L_X und $i_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i_X$ kommutieren mit der äußeren Ableitung d.

(iii) Beide Operatoren sind Derivationen der äußeren Algebra von Differentialformen. Dies bedeutet, am Beispiel von L_X, daß

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

Die allgemeine Formel folgt dann aus der Beobachtung, daß die äußere Algebra lokal erzeugt wird (als Algebra) von den Funktionen und den Differentialen von (Koordinaten-)Funktionen.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Es sei α eine Kontaktform auf einer $(2n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit N, d.h. $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1} \neq 0$. Zeigen Sie, daß durch die beiden Gleichungen

$$i_R \mathrm{d}\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \alpha(R) = 1$$

ein eindeutiges Vektorfeld auf N bestimmt ist, das sogenannte **Reeb-Vektorfeld** von α.

(b) Sei nun (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine Hyperfläche vom Kontakttyp, d.h. es existiere (nahe N) ein Liouville-Vektorfeld X transversal zu N. Wie wir in der Vorlesung gesehen hatten, definiert $\alpha := i_X \omega|_{TN}$ eine Kontaktform auf N.

Sei nun N beschrieben als *reguläre* Niveaumenge $H^{-1}(c)$ einer differenzierbaren Funktion $H\colon M \to \mathbb{R}$, d.h. das Differential $\mathrm{d}H$ verschwindet längs N nirgends. (Mittels des Satzes über Tubenumgebungen von Untermannigfaltigkeiten läßt sich das stets einrichten.)

Zeigen Sie, daß das Reeb-Vektorfeld R von α und das Hamiltonsche Vektorfeld X_H längs N sich nur um eine (punktweise) Skalierung voneinander unterscheiden. Dies bedeutet, daß der Reeb-Fluß auf N eine Umparametrisierung des Hamiltonschen Flusses ist.

Abgabe: Dienstag 25.4.23 in der Übung.