SS 2023 Prof. Hansjörg Geiges

Symplektische Topologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Für $i = 0, 1$ sei $(M_i, Q_i) = (T^2 \times \mathbb{C}, T^2 \times \{0\})$ mit der symplektischen Produkt-Form

$$\omega = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t + \frac{\mathrm{i}}{2} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$$

auf $T^2 \times \mathbb{C}$, so daß $Q_i \subset M_i$ eine symplektische Untermannigfaltigkeit ist. Hier sind s, t Koordinaten in $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Identifiziere das symplektische Normalenbündel von Q_i in M_i mit

$$\mathrm{SN}_{M_i}(Q_i) = T^2 \times \mathbb{C}.$$

Definiere

$$\Phi \colon \mathrm{SN}_{M_0}(Q_0) \longrightarrow \mathrm{SN}_{M_1}(Q_1)$$

durch

$$\Phi(s, t, z) = (s, t, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} z).$$

(a) Zeigen Sie, daß Φ ein Isomorphismus symplektischer Vektorbündel ist.

(b) Geben Sie eine explizite Formel an für den Symplektomorphismus $\psi \colon U_0 \to U_1$ von Umgebungen U_i von Q_i, den der Beweis des Umgebungssatzes für symplektische Untermannigfaltigkeiten (Satz 4.7) liefert.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie, daß der reell-projektive Raum

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \bigl\{ [z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \colon \; z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{R} \bigr\}$$

und der Clifford-Torus

$$T^n := \bigl\{ [z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \colon \; |z_0| = \cdots = |z_n| \bigr\}$$

Lagrange-Untermannigfaltigkeiten von $(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ sind.

Aufgabe 3. Auf dem $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die 2-Form

$$\omega_0 = \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Zeigen Sie, daß diese 2-Form unter der stereographischen Projektion $\phi \colon S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$ vom Südpol zurückzieht auf $\frac{1}{4}\,\mathrm{dvol}_{S^2}$, d.h. ein Viertel der Standard-Flächenform

$$\mathrm{dvol}_{S^2} = x_1\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_2\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + x_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

auf der 2-Sphäre.

Diese Rechnung zeigt, daß die Einschränkung der Fubini–Study-Form ω_{FS} auf die 2-Sphäre $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ gleich einem Viertel der üblichen Flächenform ist.

b.w.

Aufgabe 4. Wir betrachten komplexwertige Differentialformen auf dem $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

(a) Zeigen Sie, daß sich jede solche Form als komplexe Linearkombination von Dachprodukten der $\mathrm{d}z_j$ und $\mathrm{d}\overline{z}_j$ schreiben läßt.

(b) Mit (a) können wir Differentialoperatoren

$$\partial := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\,\mathrm{d}z_j \quad \text{und} \quad \overline{\partial} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\,\mathrm{d}\overline{z}_j$$

einführen, die eine k-Form auf eine $(k+1)$-Form abbilden. Verifizieren Sie, daß das gewöhnliche äußere Differential d gegeben ist durch

$$\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial},$$

und daß die Identitäten

$$\partial^2 = 0, \quad \overline{\partial}^2 = 0, \quad \text{und} \quad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$$

gelten.

(c) Rechnen Sie nach, daß die gewöhnliche symplektische Form

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j$$

auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ geschrieben werden kann als

$$\omega_0 = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j,$$

und als

$$\omega_0 = \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\overline{\partial} f \quad \text{mit} \quad f(z) = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j z_j.$$

(d) Zeigen Sie, daß die Fubini–Study-Form ω_{FS} auf der offenen Teilmenge

$$\{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \colon\ z_j \neq 0\}$$

des $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ geschrieben werden kann als

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\overline{\partial} f_j \quad \text{mit} \quad f_j(z) = \log\left(\frac{\sum_{k=0}^{n} \overline{z}_k z_k}{\overline{z}_j z_j}\right).$$

Abgabe: Dienstag 9.5.23 in der Übung.