Symplektische Topologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Gegeben sei der Kreisring $A := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ mit symplektischer Form $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(a) Beschreiben Sie ein auf ganz A definiertes Liouville-Vektorfeld, das längs beider Randkomponenten nach außen zeigt.

(b) Geben Sie einen Symplektomorphismus von A an, der die beiden Randkomponenten vertauscht.

(c) Beschreiben Sie zwei symplektische Einbettungen von A in den $\mathbb{R}^2$ mit der gewöhnlichen symplektischen Form ω_0, die jeweils $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{0\}$ auf den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ abbilden, aber umgekehrte Normalenorientierungen induzieren.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß die verbundene Summe zweier 2-dimensionaler symplektischer Mannigfaltigkeiten (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) in natürlicher Weise wieder eine symplektische Mannigfaltigkeit ist. Seien dazu B_1, B_2 offene 2-Scheiben in M_1 bzw. M_2, und setze

$$M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus B_1) \cup_{S^1} (M_2 \setminus B_2).$$

Zeigen Sie, daß für eine geeignete Wahl von B_1, B_2 auf der verbundenen Summe eine symplektische Form existiert, die auf $M_i \setminus B_i$ mit ω_i übereinstimmt.

Zeigen Sie weiter, daß der Symplektomorphietyp von $M_1 \# M_2$ im allgemeinen von der Wahl der B_i abhängt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß auf der 6-Mannigfaltigkeit $T^6 \# \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ eine symplektische Form existiert.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\, .\, , .\, \rangle$. Ein **Vektorprodukt** auf V ist eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (u, v) & \longmapsto & u \times v \end{array}$$

mit der Eigenschaft, daß $u \times v$ orthogonal zu u und v ist, und daß die Länge von $U \times v$ gleich dem Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms ist. Vektorprodukte existieren nur in den Dimensionen $0, 1$ (wo sie verschwinden) und $3, 7$, wo sie das Skalarprodukt und die Orientierung festlegen.

b.w.

Zeigen Sie:

(a) Ein Vektorprodukt kann alternativ durch die Bedingungen

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$$

und

$$u \times (v \times w) + v \times (u \times w) = \langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u - 2\langle u, v \rangle w$$

charakterisiert werden.

(b) Ist $u \in V$ ein Einheitsvektor, so definiert die lineare Abbildung $v \mapsto v \times u$ eine komplexe Struktur auf dem orthogonalen Komplement von u.

(c) Jede orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^7$ besitzt eine fast-komplexe Struktur.

Abgabe: Dienstag 4.7.23 in der Übung.

In der Woche vom 26. Juni fallen Vorlesung und Übung aus.