SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Im $\mathbb{R}^5$ betrachten wir die Unterräume

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \big\{(a,a,a+b,b,b)\colon\ a,b\in\mathbb{R}\big\},\\
U_2 &= \big\{(a,2a,a,3b,b)\colon\ a,b\in\mathbb{R}\big\},\\
U_3 &= \big\{(3a,a,8a,-a,3a)\colon\ a\in\mathbb{R}\big\}.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, daß die Summen U_1+U_2, U_1+U_3 und U_2+U_3 direkt sind, nicht aber die Summe $U_1+U_2+U_3$.

Aufgabe 2. Es seien V,W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, und $f\colon V\to W$ eine nicht notwendig lineare Abbildung. Der Graph von f ist die Teilmenge

$$G_f := \Big\{\big(v,f(v)\big)\colon\ v\in V\Big\}\subset V\times W.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung f genau dann linear ist, wenn ihr Graph G_f ein Unterraum des Produkt-Vektorraumes $V\times W$ ist.

Aufgabe 3. Es seien V,W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $U\subset V$ ein Unterraum, und $f\colon V\to W$ eine lineare Abbildung mit $U\subset \operatorname{Kern} f$. Weiter sei $\overline{f}\colon V/U\to W$ die induzierte Abbildung (vergl. Lemma 10.3 der Vorlesung). Zeigen Sie:

(a) $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U=\operatorname{Kern} f$.

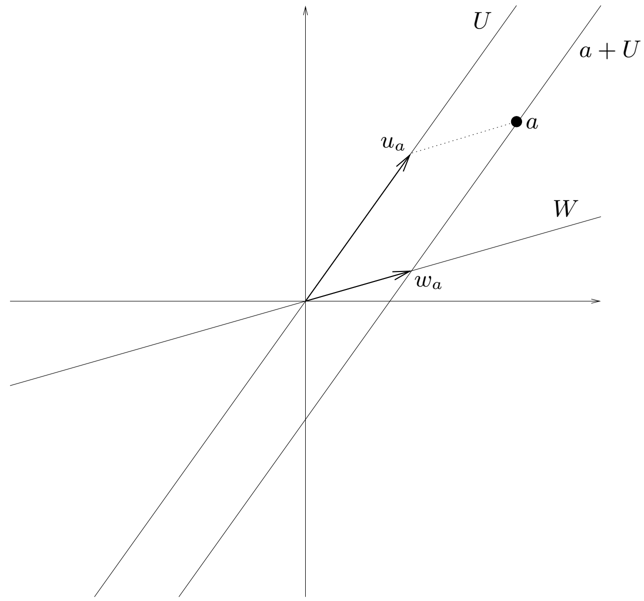
(b) $\overline{f}$ ist surjektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

(c) $f\colon V\to W$ induziert einen Isomorphismus $V/\operatorname{Kern} f\to \operatorname{Bild} f$.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U\subset V$ ein Unterraum. Sei $W\subset V$ ein zu U komplementärer Unterraum, d.h. es gelte $V=U\oplus W$. In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, wie man den Quotientenraum V/U kanonisch mit W identifizieren kann. (Beachten Sie: Die Wahl von W zu gegebenem U ist *nicht* kanonisch; aber nach Wahl von W gibt es die besagte kanonische Identifikation.) Wir behanden dies zunächst an einem konkreten Beispiel, danach in voller Allgemeinheit.

Die Annahme $\dim V<\infty$ ist nicht essentiell, aber nur für diesen Fall haben wir alle benötigten Hilfsmittel (wie die Existenz eines komplementären Unterraumes) in der Vorlesung bewiesen.

Das folgende schematische Bild sollte Ihnen eine Idee für die Bearbeitung insbesondere des Aufgabenteils (b) geben.



(a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \mathrm{Lin}\{(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) Zeigen Sie, daß

$$W := \mathrm{Lin}\{(1,2,3),(0,1,2)\}$$

ein zu U komplementärer Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Schreiben Sie den Unterraum W in der Form

$$W = \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0\big\}$$

mit geeigneten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(iii) Bestimmen Sie für $a = (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ den Schnittpunkt $w_a := (a+U) \cap W$.

(iv) Verifizieren Sie, daß die Abbildung $[a] \mapsto w_a$ wohldefiniert ist und einen Isomorphismus $V/U \to W$ liefert.

(b) Sei jetzt allgemeiner V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, der als direkte Summe $V = U \oplus W$ dargestellt ist.

(i) Zeigen Sie, daß für jeden Vektor $a \in V$ die Schnittmenge $(a+U) \cap W$ aus genau einem Punkt w_a besteht.

(ii) Verifizieren Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V/U & \longrightarrow & W \\ [a] & \longmapsto & w_a \end{array}$$

wohldefiniert und ein Vektorraumisomorphismus ist.

Abgabe: Mittwoch 17.4.24
bis spätestens **16 Uhr** in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).